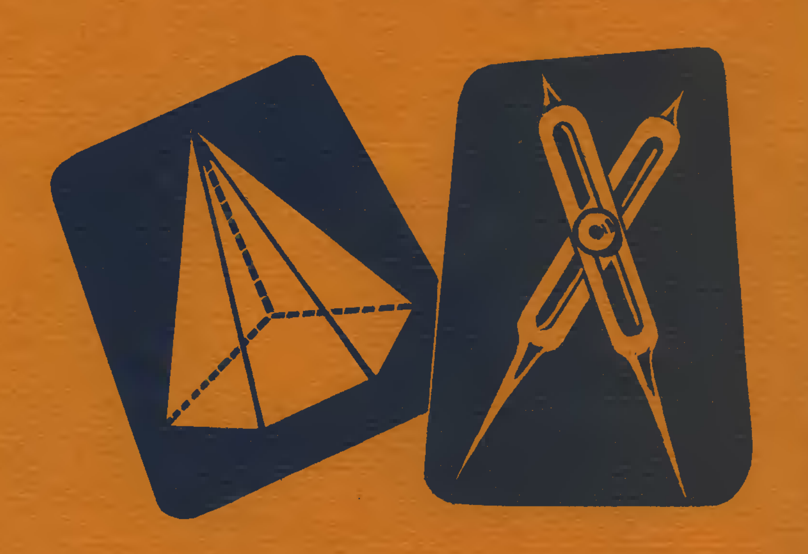
C. LEBOSSÉ C. HÉMERY

Algèbre Arithmétique et Géométrie

CLASSE DE TROISIÈME



FERNAND NATHAN

ALGÈBRE
ARITHMÉTIQUE
ET GÉOMÉTRIE

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Claude-Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

ALGÈBRE
ARITHMÉTIQUE
ET GÉOMÉTRIE

Classe de Troisième

PROGRAMME DE 1962

FERNAND NATHAN, ÉDITEUR

PROGRAMME DU 23 JUIN 1962

Classes de troisième classique A et B et de troisième moderne

(Horaire hebdomadaire : trois heures.)

Arithmétique

Racine carrée (arithmétique). Racine carrée d'un produit, d'un quotient.

Racine carrée à une unité près, à une approximation décimale donnée : définition : calcul au moyen d'une table de carrés, au moyen de la règle d'extraction arithmétique qui sera donnée sans justification.

Racine carrée (arithmétique) de x^2, x étant un nombre relatif.

Algèbre

I. — Rappel de la définition du quotient exact d'un nombre par un autre; rapports. Proportions; propriétés élémentaires.

II. — Révision de l'étude des polynômes faite dans la classe de Quatrième.

Division des monômes. Fractions rationnelles. Exercices simples de calcul portant sur des polynômes et des fractions rationnelles.

III. — Repérage d'un point dans un plan par des coordonnées rectangulaires (choix des unités sur les axes).

IV. — Notions de variable et de fonction; exemples. Représentation graphique d'une fonction, d'une variable.

Fonction $ax + b$ de la variable x; sens de variation. Représentation graphique.

Mouvement rectiligne uniforme.

V. — Équations et inéquations; position du problème; signification, dans ces problèmes, des signes $=$, $>$, $\geqslant$.

Équation et inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Interprétation graphique.

Équation du premier degré à deux inconnues, à coefficients numériques; système de deux équations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.

Application à la résolution de quelques problèmes simples.

Géométrie

A. — *Géométrie plane.*

1. Rapport de deux segments. Rapport de deux segments orientés portés par une même droite. Division d'un segment dans un rapport donné (arithmétique et algébrique).
Théorème de Thalès. Application au triangle et au trapèze; étude de la réciproque dans le cas du triangle et du trapèze.

2. Triangles semblables. Cas de similitude.

3. Projections orthogonales.
Relations métriques dans le triangle rectangle.
Rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et cotangente) d'un angle aigu. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Valeurs numériques des rapports trigonométriques des angles de 30°, 45°, 60°. Usage des tables de rapports trigonométriques.

4. Relation entre les longueurs des segments joignant un point donné aux points d'intersection d'un cercle avec deux sécantes passant par ce point. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

5. Révision des notions sur les polygones réguliers étudiées en quatrième. Relations entre le côté, le rayon du cercle circonscrit et l'apothème du carré, de l'hexagone régulier, du triangle équilatéral. Formules (sans démonstration) donnant la longueur (le périmètre) du cercle en fonction du rayon, et la longueur d'un arc de cercle. Définition du radian.

6. Révision des formules relatives aux aires de polygones plans (rectangle, triangle, trapèze, parallélogramme). Formules (sans démonstration) donnant l'aire d'un cercle en fonction du rayon et l'aire d'un secteur circulaire.

B. — *Géométrie dans l'espace.*

(Les démonstrations ne sont pas exigées, le professeur étant juge de la possibilité de les établir suivant le niveau de sa classe.)

1. Droite et plan. Leur détermination. Leurs positions relatives : parallélisme de droites et de plans.

2. Angle de deux droites de l'espace; orthogonalité.
Plans perpendiculaires à une droite, droites perpendiculaires à un plan.
Angles dièdres; rectiligne d'un dièdre. Angle de deux plans. Plans perpendiculaires.

3. Projection orthogonale sur un plan; projection d'un point, d'une droite, d'un segment.

4. Vecteurs : vecteurs équipollents, vecteurs opposés. Somme géométrique de deux vecteurs.

ALGÈBRE ET ARITHMÉTIQUE

Première leçon

RAPPORTS

1. Rapport de deux nombres. — ***On appelle quotient exact ou rapport des nombres relatifs a et b, le nombre relatif x dont le produit par b est égal à a.***

Le rapport x des nombres a et b se représente par le symbole $\frac{a}{b}\cdot$ Les nombres a et b sont les *termes* du rapport : a est le *numérateur*, b le *dénominateur*.

EXEMPLES : $\frac{-1}{+3}$; $+\frac{0,7}{3,5}$; $\frac{3/8}{-7,2}$ etc...

Les égalités : $\frac{a}{b} = x$ et $a = bx$, avec $b \neq 0$, sont donc équivalentes, ce qui s'écrit :

$$\boxed{\frac{a}{b} = x} \iff \boxed{a = bx}$$

2. Rapport de deux grandeurs. — ***Le rapport de deux grandeurs de même espèce est le nombre par lequel il faut multiplier la seconde pour obtenir la première.***

1er EXEMPLE. — Un segment de droite AB est la somme de 3 segments égaux au segment CD (fig. 1). Donc :

$$AB = CD \times 3 \iff AB = 3\ CD$$

Le nombre 3 est le *rapport des segments* AB et CD, ce qui s'écrit : $\frac{AB}{CD} = 3.$

Fig. 1.

On voit de même que $CD = \frac{1}{3}\ AB \iff \frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}\cdot$

2[e] EXEMPLE. — Un segment AB est la somme de 4 segments égaux au septième du segment CD (fig. 2). Donc $AB = \frac{4}{7} CD$.

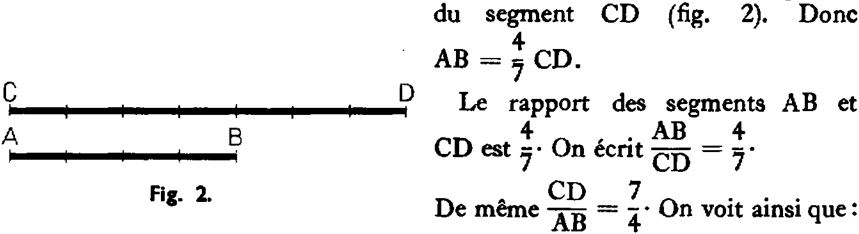


Fig. 2.

Le rapport des segments AB et CD est $\frac{4}{7}$. On écrit $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{7}$.

De même $\frac{CD}{AB} = \frac{7}{4}$. On voit ainsi que :

Le rapport de deux grandeurs constitue la mesure de la première grandeur lorsqu'on prend la seconde pour unité.

Si CD = 1 mètre, on obtient (fig. 2) : $AB = \frac{4}{7}$ de mètre.

3. Théorème. — ***Le rapport de deux grandeurs est égal au rapport de leurs mesures effectuées avec la même unité.***

Proposons-nous d'évaluer le rapport de deux segments AB et CD dont les mesures en mètres sont $\frac{17}{3}$ et $\frac{4}{5}$.

On a : $\frac{17}{3} = \frac{17 \times 5}{3 \times 5} = \frac{85}{15} \Longrightarrow$ AB mesure $\frac{85}{15}$ de mètre.

De même : $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15} \Longrightarrow$ CD mesure $\frac{12}{15}$ de mètre.

Le *quinzième* du mètre est contenu 12 fois dans CD et 85 fois dans AB. Autrement dit, AB est la somme de 85 segments égaux au *douzième* de CD

Le rapport $\frac{AB}{CD}$ est donc égal à $\frac{85}{12}$. Or, $\frac{85}{12}$ est le rapport ou quotient exact de $\frac{17}{3}$ et $\frac{4}{5}$ car : $\frac{85}{12} = \frac{17 \times 5}{3 \times 4} \Longleftrightarrow \frac{85}{12} = \frac{17}{3} : \frac{4}{5}$.

REMARQUE. — Ce théorème ramène la recherche du rapport de deux grandeurs au calcul d'un quotient exact. Aussi, dans ce qui suit, ne sera-t-il plus question que de rapports de deux nombres.

4. Propriété fondamentale. — ***On ne change pas la valeur d'un rapport en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre.***

En effet, soit x la valeur du rapport $\frac{a}{b}$. Par définition (n° 1) : $a = bx$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par n. Nous obtenons :

$$an = bxn \iff an = (bn)x$$

La dernière égalité prouve que le rapport des nombres an et bn est le nombre x. En remplacant n par son inverse, on voit qu'il en est de même des nombres $a : n$ et $b : n$. Donc :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a : n}{b : n}}$$

Il en résulte que :

1° ***Les rapports peuvent être simplifiés :***

EXEMPLES : $\frac{0,36}{4} = \frac{36}{400} = \frac{9}{100}$; $\quad \frac{-\frac{2}{3}}{+\frac{5}{3}} = -\frac{2}{5}$; $\quad \frac{15a}{25b} = \frac{3a}{5b}$

2° ***Les rapports peuvent être réduits au même dénominateur :***

EXEMPLES : $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On a : $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ et $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

$\frac{7}{x}$ et $\frac{5}{y}$. On a : $\frac{7}{x} = \frac{7y}{xy}$ et $\frac{5}{y} = \frac{5x}{xy}$.

3° ***Les opérations sur les rapports sont soumises aux mêmes règles que les opérations sur les fractions :***

EXEMPLES :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

5. Suite de rapports égaux. — ***Dans une suite de rapports égaux, on forme un rapport égal à chacun d'eux en divisant la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs.***

Soient les rapports : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = x$.

On a donc (n° 1) : $a = bx$; $\quad c = dx$; $\quad e = fx$

Par suite : $a + c + e = bx + dx + fx$

ou $a + c + e = (b + d + f)x$

Cette dernière égalité prouve que le rapport des nombres $(a + c + e)$ et $(b + d + f)$ est le nombre x. Donc :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a + c + e}{b + d + f}}$$

6. Grandeurs directement proportionnelles. — ***On dit que les nombres a, b, c, d... sont directement proportionnels aux nombres a', b', c', d'... si l'on a la suite de rapports égaux :***

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \cdots}$$

Ainsi 2, — 8, — 5 et 6,4 sont proportionnels à — 3, 12, 7,5 et — 9,6

car : $$\frac{2}{-3} = \frac{-8}{12} = \frac{-5}{7,5} = \frac{6,4}{-9,6} = -\frac{2}{3}.$$

Nous voyons que : *Pour que deux groupes de nombres soient proportionnels, il faut et il suffit qu'il existe un rapport constant entre un nombre du premier groupe et le nombre correspondant du deuxième.* Plus généralement :

On dit que deux grandeurs qui dépendent l'une de l'autre sont proportionnelles, lorsque les différentes mesures de l'une sont proportionnelles aux mesures correspondantes de l'autre.

Ainsi le *prix d'un coupon* d'une pièce d'étoffe est proportionnel à *sa longueur.* Le rapport constant entre le prix et la longueur en mètres du coupon est égal au prix d'un mètre de cette étoffe. De même :

Le poids d'une substance donnée est proportionnel à son volume.

La distance parcourue par un mobile qui se déplace à une vitesse constante est proportionnelle au temps mis pour parcourir cette distance, etc...

En désignant par a le rapport constant qui existe entre les mesures correspondantes y et x de deux grandeurs directement proportionnelles, on a :

$$\frac{y}{x} = a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = ax}$$

7. Grandeurs inversement proportionnelles. — ***On dit que les nombres a, b, c, d... sont inversement proportionnels aux nombres a', b', c', d'... s'ils sont proportionnels aux inverses de ces nombres.***

On a donc :
$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \frac{d}{\frac{1}{d'}} \cdots$$

Soit
$$\boxed{aa' = bb' = cc' = dd' \cdots}$$

Pour que deux groupes de nombres soient inversement proportionnels il faut et il suffit que le produit d'un nombre du premier groupe et du nombre correspondant du second soit constant.

Ainsi les nombres 3, — 4, 12 et — 16, sont inversement proportionnels à 8, — 6, 2 et — 1,5 car :

$$3 \times 8 = (-4) \times (-6) = 12 \times 2 = (-16) \times (-1{,}5) = 24.$$

On dit que deux grandeurs sont inversement proportionnelles si les différentes mesures de l'une sont inversement proportionnelles aux mesures correspondantes de l'autre.

Le temps mis par une équipe d'ouvriers pour effectuer un travail donné est inversement proportionnel au nombre d'ouvriers de l'équipe. Le produit constant du nombre d'ouvriers par la durée en heures du travail représente le nombre d'heures nécessaires à un ouvrier pour effectuer le travail.

De même le temps mis par un mobile pour effectuer un trajet donné est inversement proportionnel à sa vitesse. Le volume d'une substance de poids donné est inversement proportionnel à son poids spécifique, etc...

En désignant par a le produit constant des mesures correspondantes x et y de deux grandeurs inversement proportionnelles, on obtient :

$$xy = a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = \frac{a}{x}}$$

8. Applications. — 1° *Partager 77 en parties proportionnelles à* 4, — 2 *et* 5.

Il s'agit de trouver trois nombres x, y, z tels que :

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{5} \quad (1) \qquad x + y + z = 77 \quad (2).$$

Désignons par t la valeur des rapports (1). Nous obtenons :

$$x = 4t, \quad y = -2t \quad \text{et} \quad z = 5t \quad \Longrightarrow \quad x + y + z = 7t.$$

Donc : $7t = 77 \Longrightarrow t = \frac{77}{7} = 11.$

On obtient : $x = 11 \times 4 = 44$; $y = 11 \times (-2) = -22$ et $z = 11 \times 5 = 55$.

REMARQUE. — D'après le théorème (n° 5) on peut d'ailleurs écrire :

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{4-2+5} = \frac{77}{7} = 11.$$

ce qui donne directement : $t = 11$.

2° *Partager* 33 *en parties inversement proportionnelles à* 2, — 3, *et* 5.

Il s'agit de trouver trois nombres x, y, z tels que :

$$2x = -3y = 5z \quad (1) \qquad \text{avec :} \quad x + y + z = 33 \quad (2)$$

En divisant chaque membre de l'égalité (1) par $2 \times 3 \times 5 = 30$, on obtient :

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{15-10+6} = \frac{33}{11} = 3.$$

D'où : $x = 15 \times 3 = 45$; $y = -10 \times 3 = -30$ et $z = 6 \times 3 = 18$.

9. Remarques. — 1° Si des nombres x, y, z sont proportionnels à a, b, c, ils le sont aussi à ma, mb, mc, car :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{ma} = \frac{y}{mb} = \frac{z}{mc}.$$

2° Si x, y, z sont inversement proportionnels à a, b, c, ils sont proportionnels à $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ soit à : $\frac{bc}{abc}$, $\frac{ac}{abc}$ et $\frac{ab}{abc}$ donc à : bc, ca et ab.

Tout problème sur des nombres inversement proportionnels se ramène donc à un problème sur des nombres directement proportionnels.

EXERCICES

— Trouver la valeur des rapports suivants :

1. $\frac{3{,}08}{4{,}84}$ **2.** $\frac{5{,}46}{0{,}468}$ **3.** $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{11}}$ **4.** $\frac{0{,}47}{\frac{9}{13}}$

Effectuer les opérations suivantes :

5. $\frac{1{,}5}{0{,}3} + \frac{0{,}39}{0{,}52} + \frac{3{,}15}{2{,}52}$ **6.** $\frac{6{,}8}{0{,}4} + \frac{1{,}7}{8{,}5} - \frac{0{,}38}{0{,}95}$

7. $\frac{40}{25} + \frac{57}{76} - \frac{14}{81}$ **8.** $\frac{12}{0{,}8} - \frac{21}{27} + \frac{3{,}2}{0{,}8}$

9. $\frac{5}{12} \times \frac{7}{9} \times \frac{3}{15}$ **10.** $\frac{0{,}72}{1{,}2} \times \frac{2{,}4}{0{,}9} \times \frac{4}{3}$ **11.** $\left(\frac{2}{0{,}7}\right)^3$

12. $\dfrac{7 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}$ **13.** $\dfrac{1 + \frac{5}{7} + \frac{4}{9}}{1 + \frac{7}{15} + \frac{5}{3}}$ **14.** $5 - \dfrac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$

15. Démontrer que si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ chacun de ces rapports est égal au rapport $\frac{6a - 5b + 3c}{6a' - 5b' + 3c'}$. Généraliser.

16. Partager une somme de 480 F en parties proportionnelles à 5, 11 et 14.

17. Partager une somme de 793 F en parties inversement proportionnelles à 3, 4 et 7.

18. Trouver trois nombres x, y et z proportionnels à 2, 3 et 5 sachant que : $3x + 2y + z = 1\,870$.

19. Une certaine somme a été partagée en trois parties proportionnelles à 11, 15 et 17. Sachant que le double de la première part augmenté de la seconde surpasse de 24 F la troisième part, trouver le montant de chacune d'elles et celui de la somme partagée.

20. L'âge d'un père est inférieur de 3 ans à la somme des âges de ses trois enfants. Sachant que les âges du père et de ses enfants sont proportionnels à 15, 7, 5 et 4, trouver l'âge de chacun.

21. Les dimensions d'un rectangle sont mesurées, en mètres, par les nombres x et y.

1° Si l'on augmente x de 3 m et y de 4 m, quelle est, en fonction de x et y, l'augmentation de l'aire du rectangle?

2° On suppose que cette augmentation reste constante et égale à 36 m². Calculer le nombre y en fonction du nombre x.

3° L'augmentation de l'aire du rectangle étant toujours égale à 36 m², calculer x et y de manière que ces nombres x et y soient proportionnels aux nombres $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{5}$.

(B.E.P.C.)

PROPORTIONS

10. Définition. — ***On appelle proportion l'égalité de deux rapports.***

Ainsi les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d* sont en proportion lorsque le quotient du premier par le second est égal au quotient du troisième par le quatrième :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

EXEMPLES : $\frac{25}{20} = \frac{5}{4}$; $\frac{+2}{-3} = \frac{-10}{15}$; $\frac{-3}{+4} = \frac{0,75}{-1}$.

Les nombres *a*, *b*, *c*, *d* sont les quatre *termes* de la proportion; *a* et *d* se nomment les deux *extrêmes*, *b* et *c* se nomment les deux *moyens*.

11. Théorème fondamental. — ***Dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.***

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{ab = cd}$$

(Le symbole d'implication $\Longrightarrow$ se lit *implique* ou *entraîne*).

Réduisons au même dénominateur les rapports égaux $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, nous obtenons :

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}.$$

Les dénominateurs étant égaux, les numérateurs le sont aussi :

$$ad = bc$$

EXEMPLE : La proportion $\frac{-3}{+4} = \frac{0,75}{-1} \Longrightarrow (-3) \times (-1) = 4 \times 0,75.$

12. Réciproque. — ***Si l'on a :*** $ad = bc$, ***les quatre nombres*** a, b, c, d ***sont en proportion.***

$$\boxed{ad = bc} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Divisons par bd les deux membres de l'égalité : $ad = bc$.

Nous obtenons : $$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

et après simplification : $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

EXEMPLE : $0,14 \times 1,5 = 0,3 \times 0,7$ (= 0,21).

Donc : $$\frac{0,14}{0,3} = \frac{0,7}{1,5}.$$

Pour que a, b, c, d *forment une proportion, il faut et il suffit que* ad = bc.

Donc : $$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{ad = bc}$$

13. Transformation d'une proportion. — ***Dans toute proportion on peut :***

1° Intervertir les extrêmes. $$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{b} = \frac{c}{a}}$$

En effet, la première proportion nécessite $ad = bc$ et cette condition est suffisante pour qu'on puisse écrire la seconde proportion.

2° Intervertir les moyens. Pour la même raison :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{a}{c} = \frac{b}{d}}$$

3° Remplacer chaque rapport par son inverse. — De même :

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \Longrightarrow \boxed{\frac{b}{a}=\frac{d}{c}}$$

14. Quatrième proportionnelle. — ***On appelle quatrième proportionnelle à trois nombres donnés, a, b, c, le nombre x tel que les quatre nombres a, b, c, x soient en proportion.***

Par hypothèse : $$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

donc (théorème fondamental) : $ax = bc$.

Divisons les deux membres de l'égalité par a. Nous obtenons :

$$\boxed{x=\frac{bc}{a}}$$

D'une façon générale, si trois termes d'une proportion sont connus, on peut calculer le quatrième :

1° EXEMPLE : Soit : $$\frac{3,5}{x}=\frac{7}{4}.$$

On a $4 \times 3,5 = 7x$. Donc : $x = \frac{4 \times 3,5}{7} = 2.$

2° EXEMPLE : *Calculer la quatrième proportionnelle aux trois nombres* 1, $\frac{2}{5}$ *et* 0,4.

On a : $\dfrac{1}{\frac{2}{5}} = \dfrac{0,4}{x}.$ Donc : $1 \times x = \frac{2}{5} \times (0,4).$

Soit : $$x = \frac{0,8}{5} = 0,16.$$

15. Moyenne proportionnelle ou géométrique. — ***On appelle moyenne proportionnelle entre deux nombres donnés a et b le nombre x qui occupe la place des moyens dans une proportion où a et b occupent les deux extrêmes.***

On a donc : $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ soit (n° 11) : $x^2 = ab$.

D'où, si a et b sont de même signe :

$$\boxed{x=\sqrt{ab}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x=-\sqrt{ab}}$$

EXEMPLE : *Calculer la moyenne proportionnelle entre* 18 *et* 32.

On a : $$\frac{18}{x} = \frac{x}{32} \Longrightarrow x^2 = 18 \times 32 = 576.$$

Soit : $$x = \sqrt{576} = 24 \quad \text{ou} \quad x = -24.$$

16. Théorème I. — Considérons la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\cdot$ D'après le n° 5, nous avons :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}}$$

Dans une proportion on forme un rapport égal à chaque membre en divisant la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs.

17. Théorème II. — Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\cdot$ Désignons par x la valeur commune des deux membres. Nous obtenons (n° 2) :

$$a = bx \quad \text{et} \quad c = dx.$$

Retranchons ces deux égalités membre à membre. Nous obtenons :

$$a - c = bx - dx = x(b - d).$$

Cette égalité prouve que le rapport des nombres $(a - c)$ et $(b - d)$ a pour valeur x. Donc :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}}$$

Dans une proportion, on forme un rapport égal à chaque membre en divisant la différence des numérateurs par la différence des dénominateurs.

18. Remarque. — De $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ on déduit d'après les théorèmes précédents :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}.$$

Ce qui permet d'écrire (n° 11) : $\boxed{\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}}$ et $\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}}$

19. Applications. — 1° *Trouver deux nombres connaissant leur somme* 40 *et leur rapport* $\frac{2}{3}$.

Si x et y sont ces deux nombres, nous obtenons :

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \qquad \text{soit (n° 13) :} \qquad \frac{x}{2} = \frac{y}{3}.$$

Désignons par t la valeur commune de ces deux rapports; il vient :

$$x = 2\,t \qquad \text{et} \qquad y = 3\,t.$$

Donc : $$x + y = 2\,t + 3\,t = 40.$$

Soit : $$5\,t = 40 \iff t = 8.$$

Donc : $$x = 2 \times 8 = 16 \quad \text{et} \quad y = 3 \times 8 = 24.$$

2° *Trouver deux nombres connaissant leur différence* 17 *et leur rapport* $\frac{3}{7}$.
Si x et y sont ces deux nombres, nous obtenons :

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{7} \iff \frac{x}{3} = \frac{y}{7}.$$

Désignons par t la valeur commune de ces deux rapports, il vient

$$x = 3\,t \qquad \text{et} \qquad y = 7\,t.$$

Donc : $$y - x = 7\,t - 3\,t = 17.$$

Soit : $$4\,t = 17 \iff t = \frac{17}{4}.$$

Donc : $$x = 3 \times \frac{17}{4} = \frac{51}{4} \qquad \text{et} \qquad y = 7 \times \frac{17}{4} = \frac{119}{4}.$$

EXERCICES

22. Démontrer que si les nombres, a, b, c, d forment une proportion il en est de même des nombres, a^2, b^2, c^2, d^2 et en général des nombres a^n, b^n, c^n, et d^n.

23. Des deux proportions $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$, déduire les suivantes :

$$1° \ \frac{aa'}{bb'} = \frac{cc'}{dd'}. \qquad 2° \ \frac{a : a'}{b : b'} = \frac{c : c'}{d : d'}.$$

24. De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ déduire : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3\,a + 5\,c}{3\,b + 5\,d}$. Plus généralement, en déduire :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ax + cy}{bx + dy}$$

— Calculer le terme inconnu dans les propositions suivantes :

25. $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$ **26.** $\frac{6,9}{x} = \frac{0,23}{5}$ **27.** $\frac{0,5}{7} = \frac{4,9}{x}$ **28.** $\frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

29. $\frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{4}{x}$ **30.** $\frac{0,7}{0,63} = \frac{\frac{4}{5}}{x}$ **31.** $\frac{x}{5} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{7}{3}}$ **32.** $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{9}} = \frac{0,7}{x}$

— Calculer la moyenne proportionnelle entre les nombres suivants :

33. 4 et 16 **34.** $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}$ **35.** $\frac{3}{4}$ et 27 **36.** 0,25 et 1.

— Trouver deux nombres x et y sachant que :

37. $\begin{cases} x + y = 36 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{7} \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} x + y = 20 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$

39. $\begin{cases} y - x = 4 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} y - x = 20 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{9} \end{cases}$

41. De la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ déduire les suivantes :

1° $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$ 2° $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ac}{bd}$ 3° $\frac{ad+bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad+bc}$.

42. On donne un nombre a et un rapport $k \neq 1$.

1° Calculer les 2 nombres x et y définis par les égalités algébriques :

$$\frac{x-a}{x+a} = k \quad \text{et} \quad \frac{y-a}{y+a} = -k.$$

Démontrer que $xy = a^2$.

2° On pose $m = \frac{x+y}{2}$. Démontrer la double relation :

$$(m-x)^2 = (m-y)^2 = (m+a)(m-a).$$

43. On considère deux nombres positifs a et b ($a > b$). On désigne par A leur moyenne arithmétique, par G leur moyenne proportionnelle (ou géométrique) et par H leur moyenne harmonique. Par définition :

$$A = \frac{1}{2}(a+b); \quad G = \sqrt{ab} \quad \text{et} \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Démontrer que :

1° G est la moyenne géométrique de A et H.

2° A — b est la moyenne géométrique de A et A — H.

3° $a - b$ est la moyenne harmonique de a et a — H.

Application numérique : $a = 234$; $b = 104$.

44. 1° Les parts de trois personnes sont proportionnelles à 3, 5, 8. Le double de la part de la première augmenté de 4 fois la part de la deuxième et diminué de la part de la troisième vaut 10,80 F. Trouver la part de chacune des trois personnes.

2° Trouver la moyenne proportionnelle entre 3 136 et 729. *(B.E.P.C.)*

45. 1° De la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, déduire : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3a - 2b}{3c - 2d}$.

2° Appliquer ces résultats à la résolution du système d'équations à deux inconnues :

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7}, \qquad 3x - 2y = 3.$$

3° En utilisant les résultats de la précédente question, résoudre le système suivant :

$$\frac{y+2}{2x-3} = \frac{5}{7}, \qquad \frac{3}{2x-3} - \frac{2}{y+2} = 3.$$

(B.E.P.C.)

RACINE CARRÉE ENTIÈRE D'UN NOMBRE ENTIER

20. Définition. — ***On appelle racine carrée entière (ou racine carrée à une unité près par défaut d'un nombre arithmétique*** A, ***le plus grand nombre entier*** x, ***dont le carré soit inférieur ou égal au nombre*** A.

Ainsi, la racine carrée entière du nombre arithmétique 54 est 7, car $7^2 = 49$ est contenu dans 54, tandis que $8^2 = 64$ ne l'est pas.

L'opération qui consiste à calculer la racine carrée d'un nombre arithmétique s'appelle *une extraction de racine carrée*. La différence entre le nombre donné et le carré de sa racine s'appelle *le reste* de l'opération.

Dans l'exemple précédent le reste est égal à

$$54 - 7^2 = 54 - 49 = 5.$$

Le reste est nul si le nombre donné A est un carré parfait. Ainsi 81 a pour racine 9, et le reste est égal à 0.

21. Relations fondamentales. — D'une manière générale la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier x soit la racine entière d'un nombre A s'exprime par la double inégalité :

$$x^2 \leqslant A < (x + 1)^2. \qquad (1)$$

Cette condition peut se traduire en faisant intervenir le reste r.

$$r = A - x^2. \qquad (2)$$

En retranchant le nombre x^2 des deux membres de l'inégalité de droite de la relation (1), on obtient :

$$A - x^2 < (x + 1)^2 - x^2$$

ou

$$r < (x^2 + 2x + 1) - x^2.$$

Soit en réduisant : $r < 2x + 1.$ (3)

Et lorsque A est un nombre entier : $r \leqslant 2x$. D'où :

22. Théorème. — *Le reste de la racine carrée entière d'un nombre entier est au plus égal au double de la racine.*

Les relations (2) et (3) peuvent, dans les calculs, remplacer la double inégalité (1).

23. Extraction de la racine carrée d'un entier. — Deux cas sont à envisager :

1° *Si le nombre est inférieur à* 100, le résultat est immédiat. Il suffit de connaître par cœur les carrés des nombres de 1 à 10.
Ainsi le nombre 76 est compris entre $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$. La racine carrée est donc 8 et le reste est : $76 - 8^2 = 76 - 64 = 12$.

2° *Si le nombre est supérieur à* 100, on détermine la racine carrée, chiffre par chiffre, par la règle suivante :

24. Règle. — 1° *On partage le nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la droite. La racine du nombre formé par la première tranche à gauche (qui peut n'avoir qu'un seul chiffre) est le premier chiffre à gauche de la racine cherchée.*

2° *On retranche de la première tranche le carré de sa racine et à droite du reste, on abaisse la tranche suivante. On écarte le chiffre de droite du nombre ainsi formé et on divise le nombre obtenu par le double du chiffre trouvé à la racine. Le quotient est le deuxième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort.*
Pour l'essayer, on l'écrit à droite du double du chiffre trouvé à la racine et on multiplie le nombre ainsi formé par le chiffre à essayer. Si le résultat peut se retrancher du nombre formé par le premier reste et la deuxième tranche, le chiffre essayé est exact.
Sinon, l'on recommence l'essai avec le chiffre immédiatement inférieur et ainsi de suite, jusqu'à ce que la soustraction soit possible. Le chiffre correspondant est alors exact. On l'écrit à droite du chiffre déjà trouvé à la racine.

3° *A droite du reste de la soustraction précédente on abaisse la troisième tranche. On écarte le chiffre de droite du nombre ainsi formé et on le divise par le double du nombre écrit à la racine. Le quotient obtenu est le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort.*
On l'essaie comme précédemment et on continue de la même manière jusqu'à ce que l'on ait utilisé toutes les tranches du nombre.
Le dernier reste obtenu est le reste de l'opération.

25. Exemple. — Soit à extraire la racine de 218 796.

21·87·96	4
16	8
5	

1° La racine de la 1re tranche 21 est 4 et le reste 5. Le double de la racine est 8.

21·87·96	46
16	87 × 7 = 609
58·7	
516	86 × 6 = 516
71	92

2° On abaisse la 2e tranche 87 et on écarte le 7 de 587. Le quotient de 58 par 8 est 7. Le produit 87 × 7 = 609 est trop fort. Le produit 86 × 6 = 516 peut se retrancher de 587. Le deuxième chiffre de la racine est 6. Le nouveau reste est 71 et le double de la racine trouvée est 92.

21·87·96	467
16	87 × 7 = 609
587	
516	86 × 6 = 516
719·6	927 × 7 = 6 489
6489	
707	934

3° On abaisse la 3e tranche 96 et on écarte le 6 de 7 196. Le quotient de 719 par 92 ou de 71 par 9 est 7. Le produit 927 × 7 soit 6 489 peut se retrancher de 7 196.

Le troisième chiffre de la racine est 7.

La racine de 218 796 est donc 467 et le reste 707.

26. Disposition pratique.

21·87·96	467
58·7	86 × 6
719·6	927 × 7
707	

1° On s'efforce de faire les essais mentalement. Lorsqu'un chiffre convient on effectue simultanément la multiplication et la soustraction correspondante.

Ainsi pour retrancher 86 × 6 de 587 on dit : 6 fois 6, 36; de 37 il reste 1 (que l'on écrit sous 7) et on retient 3. Puis 6 fois 8, 48 et 3, 51; de 58 il reste 7 (que l'on écrit sous 8).

2° Pour doubler la racine trouvée il suffit d'ajouter les deux facteurs du produit précédent. Ainsi pour avoir le double de 46 on peut additionner 86 et 6.

27. Remarques. — 1° Il résulte de la règle d'extraction que le nombre de chiffres de la racine est égal au nombre de tranches du nombre donné.

2° Après avoir obtenu un reste partiel, le nombre alors écrit à la racine est la racine de la portion utilisée du nombre donné.

Ainsi dans l'exemple précédent 46 est la racine de 2 187.

3° Pour s'assurer que l'on n'a pas adopté un chiffre trop faible, il faut vérifier que chacun des restes partiels ne dépasse pas le double de la racine correspondante (n° 22).

7·8 6·3 7·2 5	2 8 0 4
3 8 6	48 × 8
0 2 3 7 2 5	5 604 × 4
1 3 0 9	

4° Lorsque le chiffre à essayer est 0, on l'écrit immédiatement à droite de la racine et du double de cette racine. Puis on abaisse la tranche suivante.

28. Vérification. — Pour s'assurer que 2 804 est la racine de 7 863 725, on vérifie la double inégalité :

$$(2\,804)^2 \leqslant 7\,863\,725 < (2\,805)^2$$

On peut aussi, après s'être assuré que le reste 1 309 ne dépasse pas le double de la racine, vérifier l'égalité :

$$7\,863\,725 = (2\,804)^2 + 1\,309$$

Pour effectuer la preuve par 9, on vérifie l'égalité des restes de la division par 9 du nombre donné, d'une part, et de la somme du carré de la racine et du reste, d'autre part.

Reste de 7 863 725 ; 2
Reste de 2 804 ; 5
Reste de $(2\,804)^2$; celui de $(5)^2 = 25$ soit : 7.
Reste de 1 309 ; 4.
Reste de $(2\,804)^2 + 1\,309$; celui de $7 + 4 = 11$ soit 2.

5
2 2
7

EXERCICES

— Calculer les racines carrées entières des nombres suivants.

46.	3 747 ;	8 290.	**47.**	11 237 ;	62 536.
48.	39 623 ;	65 237.	**49.**	61 009 ;	257 851.
50.	207 936 ;	487 034.	**51.**	145 829 ;	820 372.
52.	796 947 ;	7 853 432.	**53.**	568 516 ;	1 252 627.
54.	4 239 704 ;	53 629 746.	**55.**	7 394 070 ;	41 679 936.

56. La racine d'un nombre est 57. Quel est le plus grand reste possible? Quel est le nombre correspondant?

57. Soit le nombre 6 342. Calculer sa racine carrée entière. De combien peut-on augmenter ce nombre sans changer sa racine?

58. On a extrait la racine carrée d'un nombre de 4 chiffres commençant par un 3. Sachant que le reste est 122, trouver ce nombre (plusieurs solutions).

59. On effectue le produit 395 × 397. Calculer la racine carrée de ce produit et le reste de l'opération. Pouvait-on sans calculs prévoir le résultat?

60. Déterminer le nombre de carrés parfaits compris entre 5 000 et 7 500.

61. Un champ rectangulaire a une superficie de 171 735 ca. Sa largeur est les 3 /5 de sa longueur. Calculer ses deux dimensions.

62. La surface d'un cercle est égale à 14 095,46 cm². Calculer son rayon et son périmère. (On prendra $\pi = 3{,}14$).

63. La superficie d'un champ rectangulaire est comprise entre 2 ha et 3 ha. Il peut se partager exactement en lots de 150 m², en lots de 180 m², et en lots de 210 m². Calculer sa superficie.

Sachant que sa largeur est les 4 /7 de sa longueur calculer ses deux dimensions.

64. Trouver le côté d'un carré équivalent à un trapèze dont la hauteur mesure 832 m et les deux bases 1 260 m et 846 m.

65. Calculer les dimensions d'un champ trapézoïdal sachant que les dimensions : grande base, petite base et hauteur sont proportionnelles à 7, 5 et 4 et que d'autre part la superficie du champ est égale à 126,96 ares.

66. On découpe tout autour d'un tapis rectangulaire une bande usagée de 20 cm de largeur. Il reste une surface utilisable de 4,0344 m² dont la largeur est les 2 /3 de la longueur. Calculer les dimensions primitives du tapis.

RACINE CARRÉE APPROCHÉE

29. Racine carrée d'un nombre décimal ou fractionnaire. — La définition de la racine carrée entière (ou à une unité près par défaut) s'applique aux nombres décimaux ou fractionnaires.

Ainsi la racine à une unité près par défaut de 31,53 est 5 car $5^2 = 25$ est contenu dans 31,53 tandis que $6^2 = 36$ ne l'est pas.

De même la racine de $\frac{87}{5} = 17 + \frac{2}{5}$ est 4, car $4^2 = 16$ est contenu dans $17 + \frac{2}{5}$ tandis que $5^2 = 25$ ne l'est pas.

Il est évident que tout entier contenu dans un nombre décimal ou fractionnaire est contenu dans sa partie entière, d'où la règle :

Pour extraire la racine carrée à une unité près par défaut d'un nombre décimal ou fractionnaire, on extrait la racine à une unité près de sa partie entière.

Pour extraire la racine à unité près d'une fraction, il faut donc extraire la racine du quotient entier de son numérateur par son dénominateur.

30. Définition. — ***On appelle racine carrée approchée à 0,1 (ou 0,01 ou 0,001...) près par défaut d'un nombre donné entier, décimal ou fractionnaire, le plus grand nombre multiple de 0,1 (ou 0,01 ou 0,001) dont le carré soit inférieur ou égal au nombre donné.***

Ainsi la racine carrée approchée à 0,1 près par défaut de 54,3753 est 7,3. En effet $(7,3)^2 = 53,29$ est contenu dans 54,1753 tandis que $(7,4)^2 = 54,76$ ne l'est pas.

31. Règle. — *Pour extraire la racine carrée à* 0,1, *à* 0,01, *à* 0,001... *près par défaut d'un nombre décimal donné, on le partage en tranches de deux chiffres à partir de la virgule et on opère comme pour un nombre entier.*

Lorsqu'on a utilisé la partie entière du nombre donné on met une virgule à la racine. On arrête l'opération lorsque l'on a obtenu le nombre de chiffres décimaux nécessaire.

Exemple. — Soit à extraire la racine carrée à 0,01 près de 14,82867.

14,82·86·7	3,85
5 82	68×8
38 86	765×5
0 617	

La racine carrée à 0,01 près est 3,85 et le reste est 0,00617.

32. Remarques. — 1° Pour obtenir les racines aux différentes approximations successives, il suffit de continuer la même opération. Dans l'exemple précédent la racine entière est 3 et le reste 5,82867; la racine à 0,1 près est 3,8 et le reste 0,38 867.

2° Le nombre de chiffres décimaux utilisés au nombre donné est le double du nombre des chiffres décimaux obtenus à la racine. Si le nombre donné est entier ou s'il n'a pas assez de chiffres décimaux, on le complète par des zéros placés à sa droite.

3° Lorsque les premières tranches à gauche du nombre donné sont formées de zéros, les chiffres correspondants de la racine sont des zéros. Le premier chiffre significatif de la racine est la racine de la première tranche non nulle.

Exemple :

0,00 17 38	0,041
1 38	81×1
57	

4° ***Si on déplace la virgule du nombre donné de deux rangs vers la droite ou la gauche, la virgule de la racine est déplacée d'un rang dans le même sens.***

Ainsi : 0,00 17 38 : racine 0,041; 0,17 38 : racine 0,41;
17,38 : racine 4,1; 17 38 : racine 41.

33. Racine approchée d'une fraction. — Pour calculer la racine approchée d'une fraction il suffit d'extraire la racine approchée de la valeur décimale de cette fraction. Le nombre de chiffres décimaux à calculer à cette valeur doit être le double du nombre de chiffres décimaux que l'on veut obtenir à la racine.

EXEMPLE. — Soit à calculer à 0,01 près la racine de la fraction $\frac{186}{7}$.

Il faut obtenir deux chiffres décimaux à la racine et par suite 4 chiffres décimaux au nombre donné. Soit : 26,5714.

On obtient alors pour racine à 0,01 près : 5,15.

34. Emploi d'une table de carrés. — La table de la page 284 porte dans la colonne *n* la liste des 100 premiers nombres entiers et en regard, dans la colonne n^2, la liste de leurs carrés. On y lit par exemple :

$$34^2 = 1\,156 \qquad 91^2 = 8\,281.$$

1° Le nombre 3 512,91 est compris entre les nombres 3481 et 3 600 qui figurent dans la colonne n^2 et sont les carrés de 59 et de 60. On voit donc que :

$$(59)^2 < 3512{,}91 < (60)^2.$$

La racine carrée entière de 3 512,91 est 59.

2° La table montre que la racine de 7 000 est 83 à une unité près. On en déduit (n° 32, 4°) que 8,3 est la racine à 0,1 près de 70, que 0,83 est la racine à 0,01 près de 0,7 et que 0,083 est la racine à 0,001 près de 0,007.

Notons que la table donne dans la colonne $\sqrt{n}$ les racines approchées à 0,001 près des nombres de 1 à 100. Ainsi la racine de 72 est 8,485 ce qui permet d'en déduire à 0,0001 près la racine de 0,72, soit 0,8485 ou à 0,01 près la racine de 7 200, soit 84,85.

RACINE CARRÉE EXACTE

35. Définition. — ***On appelle racine carrée exacte d'un nombre arithmétique* A, *le nombre* x *dont le carré est égal au nombre* A.**

Ce nombre x se représente par $\sqrt{A}$ et se lit « racine de A ». Le symbole $\sqrt{\ }$ est un *radical.*

EXEMPLES : $\sqrt{64} = 8$ car $8^2 = 64$,

$$\sqrt{\frac{16}{15}} = \frac{4}{5} \quad \text{car} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25},$$

$$\sqrt{12{,}25} = 3{,}5 \quad \text{car} \quad (3{,}5)^2 = 12{,}25.$$

Si x et A sont des nombres arithmétiques :

$$\boxed{x = \sqrt{A}} \iff \boxed{x^2 = A}$$

Les égalités : $x = \sqrt{A}$ et $x^2 = A$ sont donc équivalentes.

On voit d'autre part que : $\sqrt{x^2} = x$ et $(\sqrt{A})^2 = A$.

36. Valeurs approchées d'une racine exacte. — Lorsque le nombre A n'est pas le carré d'un nombre entier, fractionnaire ou décimal, on peut calculer les valeurs approchées de sa racine carrée exacte. La table (p. 284) donne à 0,001 près les racines carrées des 100 premiers nombres.

Ainsi à 0,001 près, la valeur de $\sqrt{2}$ est 1,414 et celle de $\sqrt{3}$ est 1,732 on écrit:

$$\sqrt{2} = 1{,}414...$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732...$$

Les points de suspension indiquent les décimales suivantes qui n'ont pas été écrites.

Remarquons qu'il ne faut jamais écrire pour une racine entière ou approchée : $\sqrt{2} = 1$ ou $\sqrt{2} = 1{,}4$.

37. Nombres rationnels. Nombres irrationnels. — On démontre qu'un nombre, tel que 2, qui n'est pas le carré d'un nombre entier, n'est pas non plus le carré d'un nombre fractionnaire. Sa racine carrée exacte n'est donc ni un nombre entier, ni un nombre fractionnaire. C'est un nombre dont nous admettrons l'existence, et qu'on appelle nombre *irrationnel.*

Les nombres qui ne contiennent pas de radicaux sont appelés *nombres rationnels.* Ainsi : 17; $\frac{27}{4}$; 23,56 sont des nombres rationnels.

Les nombres qui contiennent un ou plusieurs radicaux portant sur des nombres qui ne sont pas carrés parfaits, sont appelés *nombres irrationnels* : $\sqrt{5}$; $2 + \sqrt{3}$; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.

EXERCICES

— Calculer à une unité près les racines carrées des fractions :

67. $\frac{2\,784}{13}$ **68.** $\frac{83\,615}{23}$ **69.** $\frac{946\,732}{27}$

— Calculer à 0,1 près les racines carrées des nombres :

70. 2 341 **71.** 7 246,54 **72.** 522,3945

73. 14 325 **74.** 12 673,07 **75.** 3 425,762

76. $\frac{17526}{11}$ **77.** $\frac{80729}{37}$ **78.** $\frac{465624}{53}$

— Calculer à 0,01 près les racines carrées des nombres :

79. 537 **80.** 268,391 **81.** 452,6245

82. 7 263 **83.** $\frac{2173}{7}$ **84.** $\frac{355}{113}$

85. Calculer à 0,001 près les racines de : 3,141592; 0,3183098; 2,7182818.

86. La surface d'un carré est 609,5961 m². Calculer le côté de ce carré et son périmètre à 1 centimètre près.

87. Une pelouse circulaire a une surface de 593,40 m². Calculer son rayon à 1 décimètre près.

88. Un terrain rectangulaire a une superficie de 8 392,56 m². La largeur est les 2/3 de sa longueur. On l'entoure d'une clôture qui revient à 0,16 F le mètre. Calculer la dépense.

89. Une barre de fer dont la section est carrée mesure 0,80 m de longueur et pèse 13,850 kg. Sachant que la densité du fer est 7,8 calculer à 1 millimètre près le côté de la section de cette barre.

90. Un vase cylindrique de 0,75 m de hauteur est rempli d'eau jusqu'aux 4/5 de sa hauteur. On enlève 7 litres d'eau et le vase n'est alors rempli qu'au 1/3 de sa hauteur. Calculer la capacité totale et le diamètre de ce vase.

91. Dans une plaque métallique de 5 millimètres d'épaisseur on découpe un carré de côté x, puis on enlève sur chaque côté du carré un demi-cercle de rayon $\frac{x}{4}$. La pièce ainsi obtenue pèse 342 grammes. En supposant la densité du métal 7,8 calculer la longueur x.

92. Une pelouse se compose d'un rectangle dont la largeur est les 2/3 de la longueur terminé par deux demi-cercles dont le diamètre est les 3/4 de la largeur.

1° Faire un croquis respectant les rapports des dimensions de cette pelouse.

2° Soit a une longueur égale au 1/8 de la largeur du rectangle. Exprimer l'aire S de la pelouse en fonction de a^2.

3° Sachant que S = 8769,60 m², déterminer les dimensions de la pelouse.

93. 1° Trouver une fraction dont le dénominateur ne contienne pas de racine carrée et qui soit égale à la fraction : $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

2° Résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \qquad x - y = 15.$$

3° x et y étant solution du système, calculer : $V = \frac{5x - 2y}{3}$ (*B.E.P.C.*)

94. 1° Transformer l'expression $\frac{21\sqrt{3} - 10}{4 + 9\sqrt{3}}$, en multipliant ses deux termes par $9\sqrt{3} - 4$.

2° Résoudre l'équation : $\frac{2x + 5}{3(\sqrt{3} - 2)} = \frac{\sqrt{3}(7 - 3x)}{2(\sqrt{3} - 2)}$.

En exprimer la solution sous forme de nombre décimal approché. (*B.E.P.C.*)

RADICAUX ARITHMÉTIQUES

38. Racine d'un produit de facteurs. — ***La racine d'un produit de facteurs est égale au produit des racines de chaque facteur.***

Soit à calculer $\sqrt{16 \times 25}$. Nous pouvons écrire successivement :

$$\sqrt{16 \times 25} = \sqrt{4^2 \times 5^2} = \sqrt{(4 \times 5)^2} = 4 \times 5.$$

De même $$\sqrt{9 \times 64 \times 100} = 3 \times 8 \times 10.$$

D'une façon générale : $$\boxed{\sqrt{a.b.c} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}.}$$

39. Racine d'un quotient. — ***La racine d'un quotient est égale au quotient des racines de chaque terme.***

Ainsi : $$\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{3^2}{5^2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

D'une façon générale : $$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

40. Simplification d'un radical. — On essaie toujours, dans les calculs, d'avoir sous les radicaux les nombres les plus simples possibles. Ainsi :

1° $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5}$ ou $3\sqrt{5}$.

2° $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2}\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3° $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}} = \sqrt{a^{2n}}\cdot\sqrt{a} = a^n\sqrt{a}.$

Lorsque l'on écrit par exemple : $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ ou $\sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$, on dit que l'on a fait sortir le nombre 4 du radical.

Lorsque l'on fait sortir un nombre d'un radical il faut en prendre la racine.

Inversement, lorsque l'on écrit $3\sqrt{a} = \sqrt{9a}$, on fait entrer 3 sous le radical, et il faut l'élever au carré.

41. Opérations sur les radicaux. — EXEMPLES.

1° $\sqrt{75}-\sqrt{12}+\sqrt{27}=5\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(5-2+3)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

2° $\sqrt{6}\times\sqrt{12}=\sqrt{6\times 12}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

3° $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{5}.\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

4° $(3+\sqrt{2}-\sqrt{5})\sqrt{2}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{2}-\sqrt{5}.\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2-\sqrt{10}$

5° $(2+\sqrt{2})(3-\sqrt{5})=6+3\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}.$

42. Expressions fractionnaires. — Il y a toujours avantage, dans les calculs, à opérer sur des dénominateurs rationnels.

EXEMPLES : 1° $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

2° $\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{3+\sqrt{5}}{9-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$

3° $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$

Les expressions telles que $3-\sqrt{5}$ et $3+\sqrt{5}$, ou bien $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ sont dites conjuguées. D'où la règle :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction, il suffit de multiplier ses deux termes par l'expression conjuguée du dénominateur.

RACINES D'UN NOMBRE RELATIF

43. Définition. — ***On appelle racine carrée d'un nombre relatif* A *tout nombre* x *dont le carré est égal à* A.**

Ainsi : + 3 est une racine de + 9, car $(+3)^2 = +9$.
— 5 est une racine de + 25, car $(-5)^2 = +25$.

44. Théorème. — ***1° Un nombre positif a deux racines carrées opposées dont la valeur absolue est la racine carrée de celle du nombre donné.***

2° Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

3° Le nombre zéro a pour racine zéro.

Le carré d'un nombre étant positif ou nul, il en résulte qu'il n'existe pas de nombre ayant un carré négatif et seul zéro a pour carré zéro. Ce qui justifie les deux dernières parties du théorème.

Soit à calculer x tel que $x^2 = +9$. Le carré de la valeur absolue de x doit être égal à 9, donc $|x| = 3$ et cela suffit. On peut donc prendre $x = +3$ ou $x = -3$. On écrit $x = \pm 3$.

De même les racines de + 5 sont $+\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ soit $\pm\sqrt{5}$.

45. Convention. — ***Le symbole $\sqrt{A}$ désigne la racine carrée positive du nombre positif* A.**

Les deux racines carrées de A sont donc : $+\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$.
Il en résulte que si a est un nombre relatif :

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{pour } a \text{ positif.} \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{pour } a \text{ négatif.} \end{cases}$$

Ainsi : $\sqrt{(+7)^2} = \sqrt{+49} = +7$ et $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{+25} = +5$.

Il faut donc tenir compte de cette règle lorsqu'on veut simplifier un radical portant sur des nombres relatifs.

EXERCICES

— Simplifier les radicaux suivants :

95. $\sqrt{243}$ **96.** $\sqrt{320}$ **97.** $\sqrt{288\,x^4}$

98. $\sqrt{245}$ **99.** $\sqrt{392}$ **100.** $\sqrt{324\,a^4}$

101. $\sqrt{\frac{45}{16}}$ **102.** $\sqrt{\frac{98}{25}}$ **103.** $\sqrt{\frac{75a^2}{4}}$

— Simplifier les expressions suivantes :

104. $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{3}$ **105.** $2\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{245}$

106. $3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{50}$ **107.** $3\sqrt{32} - \sqrt{128} + \sqrt{18}$

108. $3\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{108}$ **109.** $5\sqrt{7} - 2\sqrt{28} + \sqrt{63}$

110. $(2 + \sqrt{3} - \sqrt{5})\sqrt{5}$ **111.** $(5 - \sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{3}$

112. $(3 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$ **113.** $(4 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{10})$

114. $(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ **115.** $(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)(\sqrt{5} + 2)$

— Comparer d'après leurs carrés les nombres suivants :

116. $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$ **117.** $4\sqrt{6}$ et $7\sqrt{2}$

118. $\sqrt{14}$ et $2 + \sqrt{3}$ **119.** $2\sqrt{6}$ et $\sqrt{7} + \sqrt{5}$

120. $2 + \sqrt{7}$ et $3 + \sqrt{2}$ **121.** $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ et $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}}$

122. Réduire l'expression $\sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ et calculer sa valeur à 0,001 près.

123. Même exercice pour $\sqrt{2} \times \sqrt{8 + 3\sqrt{7}}$.

124. Calculer à 0,001 près par défaut les trois nombres $\frac{22}{7}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $1{,}8 + \sqrt{1{,}8}$. Comparer ces valeurs trouvées à celle du nombre π (= 3,14159).

— Rendre rationnels les dénominateurs des fractions :

125. $\frac{1}{\sqrt{50}}$ **126.** $\frac{\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$ **127.** $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

128. $\frac{3}{6 - 2\sqrt{3}}$ **129.** $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ **130.** $\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

— Calculer les expressions suivantes :

131. $\frac{5}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ **132.** $\frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{8} + \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{8}}{3}$

133. $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ **134.** $\frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{b}}{a - b}$

135. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{8} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6} - 1} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ **136.** $\frac{\sqrt{21}}{3 - 2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

46. Définition. — ***Une expression algébrique est un ensemble de nombres donnés, ou représentés par des lettres, sur lesquels sont indiquées des opérations à effectuer.***

EXEMPLES : $2ax^2 - 3bx$; $\quad \dfrac{x^2-4}{x-2}$; $\quad a - \sqrt{b^2 - c^2}$.

Une expression algébrique est *rationnelle* quand elle ne contient pas de lettres sous un radical. Sinon elle est *irrationnelle.*

Une expression rationnelle est *entière* si elle ne contient pas de dénominateur littéral. Dans le cas contraire elle est *fractionnaire.*

$\dfrac{2}{3}a^2 - b\sqrt{3}$ est une expression entière.

$\dfrac{1}{x+3}$ est une fraction rationnelle.

$3x + \sqrt{x^2+7}$ est une expression irrationnelle.

47. Valeurs numériques d'une expression algébrique.

La valeur numérique d'une expression algébrique, pour un ensemble de valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, s'obtient en remplaçant chaque lettre par sa valeur et en effectuant les opérations indiquées.

Ainsi pour $a = +4$ et $b = -5$, l'expression $\dfrac{2a(a-b)}{3}$ a pour valeur numérique :

$$\frac{2 \times 4(4+5)}{3} = 24.$$

Parfois il est impossible de calculer la valeur numérique d'une expression. Ainsi pour $x = +1$, les expressions $\frac{x+1}{x-1}$ et $\sqrt{x-2}$ n'ont pas de valeur numérique.

Lorsque deux expressions ont même valeur numérique, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, elles sont équivalentes.

$(a+b)x$ et $ax+bx$ sont deux expressions équivalentes.

48. Calcul algébrique. — Le calcul algébrique a pour but la transformation des expressions algébriques en expressions équivalentes.

Simplifier ou *réduire une expression,* c'est l'écrire sous une forme équivalente plus simple, et par conséquent plus facile à calculer numériquement.

MONÔMES

49. Définition. — ***Un monôme est une expression algébrique dans laquelle les seules opérations à effectuer sur les lettres sont des multiplications ou des élévations à une puissance.***

Ainsi : $\frac{7}{2}a^2b^3x$, $\quad -a^2(-4)b^2(-c)$, $\quad \left(2+\frac{3}{4}\right)a^2x(-y)$

sont des monômes.

La valeur numérique d'un monôme peut toujours se calculer, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Pour $a = -2$, $b = +3$, $x = -1$ le monôme $\frac{7}{2}a^2b^3x$ a pour valeur numérique :

$$\frac{7}{2} \times (-2)^2 \times (+3)^3 \times (-1) = -\frac{7}{2} \times 4 \times 27 \times 1 = -378.$$

50. Réduction d'un monôme. — Soit le monôme :

$$(-4)\,a^2b^2\left(\frac{1}{3}\right)ab^3x^2.$$

Nous pouvons modifier l'ordre des facteurs, puis remplacer plusieurs d'entre eux par leur produit effectué. Nous obtenons :

$$(-4) \times \left(\frac{1}{3}\right)a^2a.b^2b^3.x^2 \qquad \text{puis} \qquad \boxed{-\frac{4}{3}a^3b^5x^2.}$$

Le monôme a été réduit :

$a^3b^5x^2$ ***est la partie littérale du monôme.***

$-\frac{4}{3}$ ***est le coefficient numérique du monôme.***

(Il faut éviter de confondre, dans un monôme réduit, le coefficient avec l'exposant de l'une des lettres.)

Le coefficient numérique n'est pas toujours apparent :

$$a^3x^3y \text{ a pour coefficient } +1.$$
$$-a^2by \text{ a pour coefficient } -1.$$

51. Monômes identiques. — Lorsque deux monômes sont équivalents, ils ont même forme réduite. On dit alors qu'ils sont *identiques;* ils ont même partie littérale et même coefficient.

Ainsi les monômes :

$$(-2)\,ab\left(+\frac{1}{3}\right)b^3x^2 \quad \text{et} \quad a\,(+4)\,b^2\left(-\frac{1}{6}\right)b^2x^2$$

se réduisent tous deux à : $-\frac{2}{3}\,ab^4x^2.$

Ils sont identiques.

52. Monômes semblables. — ***Deux monômes sont semblables lorsqu'ils ont la même partie littérale.***

Ainsi : $15\,a^3b^2c$, $-7\,a^3b^2c$ et $\frac{3}{2}\,a^3b^2c$

sont des monômes semblables.

53. Somme algébrique de monômes semblables. — Considérons la somme algébrique de plusieurs monômes semblables :

$$4\,a^2x^3y - \frac{5}{2}\,a^2x^3y + \frac{3}{4}\,a^2x^3y.$$

Cette somme est le développement du produit équivalent :

$$\left(4 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}\right)a^2x^3y$$

obtenu en mettant entre les parenthèses la somme des coefficients.

La somme algébrique proposée est donc égale au monôme :

$$\frac{9}{4}\,a^2x^3y.$$

La somme algébrique de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable à ces monômes dont le coefficient est égal à la somme algébrique des coefficients des monômes considérés.

La réduction d'une somme de monômes semblables se ramène donc à celle des coefficients.

54. Degré d'un monôme.

On appelle degré d'un monôme par rapport à une lettre l'exposant de cette lettre dans le monôme.

$\frac{8}{3} ab^4x^2$ est du premier degré en a, du quatrième degré en b et du second degré en x.

On appelle degré d'un monôme par rapport à plusieurs lettres la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.

$\frac{8}{3} ab^4x^2$ est du cinquième degré $(1 + 4)$ en a et b
du troisième degré $(1 + 2)$ en a et x
du septième degré $(1 + 4 + 2)$ en a, b et x.

EXERCICES

— Calculer la valeur numérique des expressions :

137. $3a^2x - 7a + 2x$ pour $a = +5$ et $x = -\frac{3}{2}$.

138. $7x^3 - 4x^2y - 12xy^2 \times 4y^3$ pour $x = -3$ et $y = +5$.

139. $(x^2 + y^2)^2 - x^2(x^2 + 2y^2)$ pour $x = -5$ et $y = +6$.

140. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ pour $a = 7$, $b = 5$ et $c = -11$.

141. $\frac{8x^3}{27} - \frac{y^3}{8} + xy\left(\frac{y}{2} - \frac{2x}{3}\right)$ pour $x = 6$ et $y = -4$.

142. $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ pour $a = 10$, $b = -51$ et $c = -91$.

143. $2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$ pour $a = 13$, $b = 12$ et $c = 5$.

— **Vérifier l'équivalence des expressions suivantes :**

144. $(a - b)^2 + 3ab$, $(a + b)^2 - ab$ et $\dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$ pour $a = 3$ et $b = -5$.

145. $x^6 - y^6$, $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$ et $(x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ pour $x = 3$ et $y = -2$.

146. $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$ et $3(x + y)(y + z)(z + x)$ pour $x = 7$, $y = -3$ et $z = -5$.

147. $a + \sqrt{ab} + b$ et $\dfrac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ pour $a = 5$ et $b = 3$.

— **Réduire les monômes suivants et calculer leur valeur numérique :**

148. $\left(-\dfrac{3}{2}\right) a^2x^3 \times 5xy^2 \times \left(-\dfrac{2}{5}\right) a^3y$ pour $a = 3$; $x = -2$ et $y = 1$.

149. $\left(-\dfrac{2}{3}\right) x^2 \times 7xy \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) ay$ pour $a = 5$; $x = 2$ et $y = -3$.

150. $\dfrac{7}{2} a^2 \times \dfrac{4}{3} x^3y \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) a^2y$ pour $a = \dfrac{2}{3}$; $x = 6$ et $y = -2$.

151. $\dfrac{3}{2} a^2x \times (-3) x^4 \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) b^3$ pour $a = -5$; $b = \dfrac{1}{3}$ et $x = 4$.

152. $\dfrac{4}{7} a^3 \times \left(-\dfrac{2}{5}\right) bx \times \left(-\dfrac{4}{5}\right) ab^2x$ pour $a = -1$; $b = 5$ et $x = -7$.

— **Effectuer les sommes de monômes suivantes :**

153. $\dfrac{90}{189} a^2x^3 + \dfrac{45}{84} a^2x^3 - \dfrac{75}{126} a^2x^3$.

154. $\dfrac{51}{56} ax^2y^3 + \dfrac{88}{231} ax^2y^3 - \dfrac{26}{39} ax^2y^3$.

155. $\dfrac{77}{35} a^2bx - \dfrac{80}{66} a^2bx - \dfrac{56}{105} a^2bx$.

156. $\dfrac{123}{270} x^3y^5z - \dfrac{45}{175} x^3y^5z + \dfrac{77}{882} x^3y^5z$.

POLYNÔMES

55. Définition. — ***Un polynôme est une somme algébrique de plusieurs monômes.***

Chacun de ces monômes constitue un *terme* du polynôme.

EXEMPLES : $3\,a^2b - ab^3 - \frac{2}{5}\,a^3 + 4b^5$; $\quad 2x - x^3 + 5 - \frac{4}{3}\,x^2$.

Lorsqu'un polynôme contient seulement deux termes, on l'appelle un **binôme.** S'il contient trois termes c'est un **trinôme.**

$2\,x^2 - 5\,x$ est un binôme. $\quad 4\,x^2 - 3\,x + 5$ est un trinôme.

La valeur numérique d'un polynôme s'obtient en faisant la somme des valeurs numériques de chacun de ses termes :

Ainsi pour : $x = -2$, le trinôme $2\,x^2 - 3\,x + 1$ est égal à :

$$2\,(-2)^2 - 3\,(-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15.$$

56. Réduction d'un polynôme. — Considérons le polynôme :

$$7\,x^3 + 8\,x - 3 + 4\,x - 2\,x^3 - 5\,x + 2.$$

Groupons les termes semblables et remplaçons chacun de ces groupes par le monôme équivalent. Nous obtenons :

$$7\,x^3 - 2\,x^3 + 8\,x + 4\,x - 5\,x - 3 + 2$$

ou $$(7 - 2)\,x^3 + (8 + 4 - 5)\,x + (-3 + 2).$$

Soit finalement : $$5\,x^3 + 7\,x - 1.$$

Le polynôme ainsi obtenu est équivalent au polynôme proposé et ne contient plus de termes semblables. On dit que *le polynôme a été réduit* ou que l'on a fait la *réduction des termes semblables.*

57. Polynômes identiques. — Lorsque deux polynômes se composent, après réduction, des mêmes termes, on dit qu'*ils sont identiques.*

Les polynômes :

$$-3+x^2-5x \qquad \text{et} \qquad -5x-3+x^2$$

sont deux polynômes identiques. On passe de l'un à l'autre en modifiant l'ordre des termes.

On démontre que deux polynômes équivalents sont identiques.

58. Degré d'un polynôme. — ***Le degré d'un polynôme réduit, par rapport à une lettre (ou à plusieurs lettres), est le degré du monôme de plus haut degré par rapport à cette lettre (ou à ces lettres).***

$2x-3+4x^2$ est du second degré en x.

$x^6y^3-3x^4y^5-2xy^4$ est le degré 6 en x, de degré 5 en y et de degré 9 en x et y.

Contrairement à ce qui se passe pour un monôme le degré par rapport à deux lettres n'est pas obligatoirement la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.

Lorsque tous les termes d'un polynôme ont même degré par rapport à plusieurs lettres on dit que le *polynôme est homogène par rapport à ces lettres* :

$2x^3-4xy^2+x^2y$ est un trinôme homogène du troisième degré en x *et* y.

59. Polynômes ordonnés. — Considérons un polynôme à *une seule variable,* c'est-à-dire contenant une seule lettre :

$$3x^2-2x+4-5x^3.$$

Il est logique d'écrire les termes de ce polynôme de façon que leurs degrés aillent soit en augmentant soit en diminuant.

$$4-2x+3x^2-5x^3 \qquad \text{ou} \qquad -5x^3+3x^2-2x+4.$$

Dans le premier cas *le polynôme est ordonné par rapport aux puissances croissantes de x* et dans le deuxième cas *il est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x.*

Un tel polynôme est complet s'il y figure un terme de chaque degré. Le polynôme incomplet du 3ᵉ degré x^3-2x+1 peut d'ailleurs s'écrire

$$x^3+0x^2-2x+1 \qquad \text{ou} \qquad x^3 \cdot -2x+1$$

en remplaçant le terme manquant en x^2 par $0x^2$ ou par un point.

Un polynôme à plusieurs variables peut être ordonné par rapport à l'une de ces variables.

$x^2y - 3\,xy + 4\,x - 2$ est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x.

$2\,x^3 - 3\,x^2y - 4\,xy^2 + y^3$ est un polynôme homogène du 3e degré en x et y ordonné simultanément par rapport aux puissances décroissantes de x et par rapport aux puissances croissantes de y.

60. Somme de polynômes. — Soit à additionner les polynômes :

$$a^2 + 5\,a - 7\,b, \quad 6\,a^2 + 3\,b - 2 \quad \text{et} \quad -4\,a^2 + 5\,b - 3.$$

La somme de ces polynômes s'écrit :

$$(a^2 + 5\,a - 7\,b) + (6\,a^2 + 3\,b - 2) + (-4\,a^2 + 5\,b - 3).$$

Cette expression a, quelles que soient les valeurs numériques données aux lettres, même valeur que le polynôme obtenu en supprimant les parenthèses :

$$a^2 + 5\,a - 7\,b + 6\,a^2 + 3\,b - 2 - 4\,a^2 + 5\,b - 3.$$

La somme de plusieurs polynômes est équivalente au polynôme formé par tous les termes de ces polynômes.

Nous pouvons d'ailleurs, dans l'exemple envisagé, réduire le résultat. Nous obtenons :

$$3\,a^2 + 5\,a + b - 5.$$

61. Différence de deux polynômes.

La différence des polynômes : $3\,a^2 + 6\,a - 7\,b$ et $2\,a^2 - 4\,a - 3\,b$ s'écrit :

$$(3\,a^2 + 6\,a - 7\,b) - (2\,a^2 - 4\,a - 3\,b).$$

Cette expression a même valeur numérique que le polynôme obtenu en supprimant les parenthèses :

$$3\,a^2 + 6\,a - 7\,b - 2\,a^2 + 4\,a + 3\,b.$$

Par suite ce résultat est équivalent à la somme :

$$(3\,a^2 + 6\,a - 7\,b) + (-2\,a^2 + 4\,a + 3\,b).$$

D'où la règle :

Pour retrancher un polynôme il suffit d'ajouter le polynôme symétrique obtenu en changeant les signes de chacun de ses termes.

Une somme algébrique de polynômes se ramène par suite à une suite d'additions.

62. Somme algébrique de polynômes à une variable.

Il est bon dans ce cas d'ordonner ces polynômes et de les compléter s'il y a lieu. On peut alors les disposer, comme pour une addition numérique, l'un au-dessous de l'autre, en faisant correspondre verticalement les termes semblables :

Exemple. — Soient les polynômes :

$A = 2 - 5x + 4x^3$; $B = -8x + 4x^2 + 6$; $C = -2x^3 + 3 + x^2 + 2x$.

Pour calculer la somme algébrique $S = A - B + C$ on écrit :

$A =$	$+4x^3$	•	$-5x$	$+2$
$-B =$	•	$-4x^2$	$+8x$	-6
$C =$	$-2x^3$	$+x^2$	$+2x$	$+3$
$S =$	$2x^3$	$-3x^2$	$+5x$	-1

La réduction des termes semblables est immédiate et on obtient un résultat ordonné.

EXERCICES

Réduire et ordonner les polynômes suivants :

157. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} + 4x^3 + \frac{7}{2}x + 5 - 3x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 4.$

158. $\frac{5}{3}x^2 - x^3 + 4x + 3 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{11}{4} - 3x - \frac{2}{3}x^2.$

159. $2a^3 + \frac{2}{5}a - \frac{4}{3}a^3 + 4 + 3a^2 + \frac{8}{5}a - a^2 - \frac{10}{3}.$

160. $2a^2b - a^3 - \frac{5}{2}ab^2 - 2b^3 + 2a^3 - 5a^2b + \frac{11}{2}ab^2 + b^3.$

161. $\frac{5}{2}x^2y + \frac{7}{4}y^3 - 2xy^2 + 3x^3 - \frac{11}{4}y^3 - \frac{9}{2}x^2y + 4xy^2 - 2x^3.$

162. Soient les deux polynômes : $A = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4.$
$B = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4.$

Calculer $A + B$ et $A - B$. Vérifier en calculant les valeurs numériques de A, B, $A + B$ et $A - B$ pour $x = -2$.

163. Reprendre l'exercice précédent avec les polynômes :

$A = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x + 1$ et $B = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 1$, pour $x = -3$.

— **Réduire les expressions suivantes :**

164. $\left(5x^2 + 3x^4 - \frac{4}{5}x\right) + \left(2x^3 - \frac{2}{3}\right) - \left(7x^2 - \frac{4}{5}x^2 + 5\right)\cdot$

165. $(4x + 12x^3 - 5x^2 + 5) + (6x^2 - 9 - 5x - 7x^3) - (3x^2 + 2x^3 - 2 + 2x).$

166. $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - (5ab^2 - 2a^3).$

167. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (2a^3 - 2b^3) - (3ab^2 - 3a^2b).$

— Effectuer :

168. $[(3x - 4y) + (2x - 3) - (y + 5)] + [(2x + 3y - 7) - (6x + y + 10)].$

169. $[(4x + 5y - 2) - (3x + 2y - 3)] - [(2x - 3y - 4) - (2x - 5y + 7)].$

170. $[(5x - 3y + 7) - (2x - 5y - 2)] + [-(4x + 3y + 1) + (3x - y - 3)].$

171. $[(2x - 3) - (3y + 5)] + [4x - 1) - (2y - 3)] - [(5x + 2) - (4y - 1)].$

172. Soient les polynômes :

$A = x^2 - 3x + 5;\quad B = 2x^2 + 5x - 4;\quad C = 3x^2 - 2x - 1.$

Former les polynômes : $A + B + C$, $B + C - A$, $C + A - B$ et $A + B - C$.

173. Soient les polynômes :

$A = 3a^2 - 2ab + 7b^2;\quad B = 5a^2 + 4ab - 2b^2;\quad C = 2a^2 - 6ab + 5b^2.$

Former les polynômes $A + B - C$; $B + C - A$ et $C + A - B$.

174. Soient les polynômes :

$P = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1.\quad R = 2x^3 + x^2 - 4x - 3.$

$Q = 3x^3 - 2x^2 + x - 4\quad S = x^3 - 4x^2 - 3x + 2.$

Former les polynômes :

$(P + Q) - (R + S)$; $(P - Q) + (R - S)$ et $(P - Q) - (R - S)$.

MULTIPLICATION DES MONÔMES ET DES POLYNÔMES

63. Produit de deux monômes. — Soient les monômes :

$$A = \frac{3}{5} ax^3y^2 \qquad \text{et} \qquad B = -2a^4x^5.$$

Le produit de ces deux monômes s'écrit :

$$A.B = \left(\frac{3}{5} ax^3y^2\right) \times \left(-2a^4x^5\right).$$

Or pour multiplier deux produits, nous pouvons former le produit unique contenant tous les facteurs de ces deux produits. Nous obtenons :

$$A.B = \frac{3}{5} a.x^3.y^2 (-2) a^4.x^5 = -\frac{6}{5} a^5x^8y^2.$$

D'où la règle :

Le produit de deux monômes est un monôme dont :

1° Le coefficient est le produit des coefficients de chacun des facteurs.

2° La partie littérale est formée des lettres contenues dans les deux monômes, chacune d'entre elles ayant pour exposant la somme de ses exposants dans chacun des facteurs.

Remarquons que cette règle s'étend immédiatement au produit de plusieurs monômes.

EXEMPLE :

$$\left(\frac{3}{4}a^2x^3y\right)\left(\times - \frac{2}{5}ay^4\right) \times \left(2x^5y^2\right) = -\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times 2a^2x^3y.ay^4.x^5y^2.$$

$$= -\frac{3}{5}a^3x^8y^7.$$

64. Carré d'un monôme. — Soit le monôme $-\frac{2}{3}ax^4y^3$. Nous obtenons immédiatement :

$$\left(-\frac{2}{3}ax^4y^3\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}ax^4y^3\right) \times \left(-\frac{2}{3}ax^4y^3\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 a^2.x^8.y^6 = \frac{4}{9}a^2x^8y^6.$$

Pour obtenir le carré d'un monôme, il suffit de prendre le carré du coefficient et de doubler l'exposant de chaque lettre.

On obtiendrait de même le cube du monôme précédent.

$$\left(-\frac{2}{3}ax^4y^3\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 a^3x^{12}y^9 = -\frac{8}{27}a^3x^{12}y^9.$$

65. Produit d'un polynôme par un monôme. — Soit à effectuer le produit :

$$(a^2x^3 - 5x + 3a)(-2a^3x).$$

En supposant les différents termes remplacés par des valeurs numériques, nous avons à multiplier une somme par un nombre. Ce produit est donc équivalent au polynôme :

$$(a^2x^3)(-2a^3x) + (-5x)(-2a^3x) + (3a)(-2a^3x)$$

Soit : $$-2a^5x^4 + 10a^3x^2 - 6a^4x.$$

66. Produit de deux polynômes. — Soit à calculer :

$$(3x^2 - 2x + y)(3x - y).$$

En supposant les termes des deux polynômes remplacés par des valeurs numériques, nous avons à effectuer le produit de deux sommes, et nous voyons que ce produit a même valeur numérique que le polynôme :

$$(3x^2)(3x) + (-2x)(3x) + (y)(3x) + (3x^2)(-y) + (-2x)(-y) + (y)(-y).$$

Soit : $$9x^3 - 6x^2 + 3xy - 3x^2y + 2xy - y^2$$

ou $$9x^3 - 3x^2y + 5xy - 6x^2 - y^2.$$

67. Produit de deux polynômes à une seule variable. — Soient les polynômes :

$$A = 3x^3 - 2 + 5x \qquad B = 2x^2 - 4x + 3.$$

Pour effectuer leur produit, on les écrit en les ordonnant, l'un au-dessous de l'autre et on calcule les produits partiels du premier par chacun des termes du second en disposant les résultats comme pour l'addition (n° 62).

A	$=$	$3x^3$	•	$+\ 5x$	$-\ 2$		
B	$=$	•	$2x^2$	$-\ 4x$	$+\ 3$		
$A \times 2x^2$	$=$	$6x^5$	•	$+\ 10x^3$	$-\ 4x^2$		
$A \times (-4x)$	$=$		$-\ 12x^4$	•	$-\ 20x^2$	$+\ 8x$	
$A \times 3$	$=$			$9x^3$	•	$+\ 15x$	$-\ 6$
$A \times B$	$=$	$6x^5$	$-\ 12x^4$	$+\ 19x^3$	$-\ 24x^2$	$+\ 23x$	$-\ 6$

On obtient immédiatement le résultat réduit et ordonné. Remarquons d'autre part que le degré du produit est la somme des degrés de chacun des facteurs.

68. Produit de plusieurs polynômes. — Soit à effectuer le produit des trois polynômes suivants :

$$A = 3x^2 - 1; \qquad B = 2x + 1 \qquad \text{et} \qquad C = 4x^2 - 2x + 1.$$

On calcule :

$$A.B = (3x^2 - 1)(2x + 1) = 6x^3 + 3x^2 - 2x - 1.$$

Puis $A.B.C = (6x^3 + 3x^2 - 2x - 1)(4x^2 - 2x + 1).$

Soit $A.B.C = 24x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 1$

Le produit est d'ailleurs indépendant de l'ordre des facteurs et on peut par suite remplacer deux quelconques des polynômes par leur produit effectué. Le degré du produit est la somme des degrés de chacun des facteurs.

69. Carré, cube d'un polynôme. — Soit le polynôme : $2x - y$.

$$(2x - y)^2 = (2x - y)(2x - y) = 4x^2 - 2xy - 2xy + y^2$$

Soit $(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2.$

Nous obtenons de même :

$$(2x - y)^3 = (2x - y)^2(2x - y) = (4x^2 - 4xy + y^2)(2x - y) =$$
$$8x^3 - 8x^2y + 2xy^2 - 4x^2y + 4xy^2 - y^3.$$

Soit $(2x - y)^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3.$

70. Exemple de calcul pratique. — Soit à calculer l'expression :

$$A = 3(2x - 3)(3x + 2) - 2(x + 4)(4x - 3) + 9x(4 - x).$$

Cette expression est une somme de produits. Il faut calculer d'abord chacun de ces produits :

$$\begin{aligned} 3\,(2\,x - 3)\,(3\,x + 2) &= \quad (6x - 9)\,(3\,x + 2) = \quad 18\,x^2 - 15\,x - 18 \\ -2\;(x + 4)\,(4\,x - 3) &= (-2\,x - 8)\,(4\,x - 3) = -\,8\,x^2 - 26\,x + 24 \\ 9\,x\,(4 - x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = \quad 36\,x - 9\,x^2. \end{aligned}$$

L'expression A est donc égale à :

$$18\,x^2 - 15\,x - 18 - 8\,x^2 - 26\,x + 24 + 36\,x - 9\,x^2.$$

Soit $\qquad A = x^2 - 5\,x + 6.$

EXERCICES

— Effectuer les produits suivants :

175. $(5\,a^3b^2)\left(\frac{3}{5}\,a^2b^5\right)\cdot$ **176.** $\left(\frac{7}{3}\,a^4b^3c\right)\left(-\frac{3}{5}\,ab^2c^3\right)\cdot$

177. $\left(\frac{4}{5}\,a^3x^2y\right)\left(-\frac{7}{2}\,ax^3y^2\right)\cdot$ **178.** $\left(-\frac{4}{3}\,xy^2z^3\right)\left(-\frac{5}{4}\,x^2y^3z\right)\cdot$

179. $\left(-\frac{5}{7}\,ab^2x^3\right)\left(\frac{8}{15}\,a^3bx\right)\left(-\frac{21}{4}\,a^2b^3x^4\right)\cdot$

180. $\left(-\frac{5}{12}\,ab^2xy\right)\left(-\frac{14}{5}\,a^3bx^3y^2\right)\left(-\frac{2}{7}\,a^2b^2xy^2\right)\cdot$

— Calculer les expressions suivantes :

181. $\left(-\frac{2}{5}\,a^3b^3x\right)^2\cdot$ **182.** $\left(\frac{5}{3}\,ab^2x^4\right)^2\cdot$ **183.** $\left(-\frac{3}{2}\,a^5b^3xy^2\right)^3\cdot$

184. $\left(\frac{5}{4}\,a^3b^4xy^2\right)^2\cdot$ **185.** $\left(\frac{7}{2}\,a^4b^2x^3y\right)^3\cdot$ **186.** $\left(-\frac{5}{3}\,a^2b^4x^3y\right)^3\cdot$

— Effectuer les produits suivants :

187. $\left(\frac{2}{3}\,a^3b^2 + a^2b + \frac{3}{2}\,a\right)\left(\frac{5}{3}\,a^2b^3 - \frac{5}{2}\,ab^2\right)\cdot$

188. $\left(\frac{9}{4}\,a^4x - \frac{3}{5}\,a^2x^2 + \frac{4}{25}\,x^3\right)(15\,a^2x + 4\,ax^2).$

189. $\left(\frac{1}{9}\,x^3y + \frac{1}{6}\,x^2y^3 + \frac{1}{4}\,xy^5\right)\left(-\frac{2}{3}\,x^2y^2 + 2\,xy^4 - \frac{3}{2}\,y^6\right)\cdot$

190. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{8\,y^2}{9}\right)\left(\frac{9\,x^2}{16} + \frac{3\,xy}{4} + y^2\right)\left(\frac{x^2}{8} - \frac{xy}{6} + \frac{2\,y^2}{9}\right)\cdot$

191. $(a^2 + 2\,ab + 2\,b^2)\,(a^2 - 2\,ab + 2\,b^2)\,(a^2 + 2\,b^2)\,(a^2 - 2\,b^2).$

192. Soient les polynômes : $A = 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$ et $B = 9x^2 - 6x + \frac{1}{2}$.

1° Calculer le produit A.B.

2° Vérifier, en calculant pour $x = -\frac{1}{3}$ les valeurs numériques de A, B et du produit A B obtenu.

193. Soient les trois polynômes :

$A = \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}y^2$; $B = \frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}xy + y^2$; $C = x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{9}{4}y^2$.

1° Calculer le produit A.B.C.

2° Vérifier en calculant pour $x = 3$ et $y = -4$ les valeurs numériques de A, B, C et du résultat A.B.C. obtenu.

194. 1° Calculer le carré, puis le cube du polynôme $A = 2x^2 - 5x + 3$.

2° Vérifier, en calculant pour $x = -5$ la valeur numérique de A et celle de chacun des résultats obtenus.

— Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :

195. $(3x - 5)(-7x + 3)$.

196. $(2x + 7 - 4x^2)(x^3 - 3x^2)$.

197. $(5x^2 - 3x)(2x^2 + 5x)$.

198. $(5x - 3x^2 + 8)(2x - 7x^3 + 5x^2)$.

199. $(3x^2 - 6x^4)(2x + 4x^3)$.

200. $(2x^3 - 5x^4 + 3x^2)(3x - 5)$.

201. $(5x^2 - 3 + 2x)(2x^2 + 5x)$.

202. $(2x^2 - 7x^4 + 5x^3)(5x^2 - 4x)$.

203. $\left(\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{4}\right)\left(\frac{7}{2} - \frac{x}{3}\right)$

204. $\left(\frac{7}{3}x - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\left(3x^2 - \frac{x}{2} + 5\right)$.

205. $(3x + 5)(2x - 3)(4x - 1)$.

206. $(2x + 3)(3x + 4)(4x - 7)$.

207. $(4x^2 - 3)(2x + 1)(2x - 1)$.

208. $(3x + 5)(x^2 - 4)(3x - 5)$.

209. $(3x^2 - 5x + 2)^2$.

210. $(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)^2$.

211. $(4x^2 - 2x + 3)^3$.

212. $(x^3 + 2x^2 - 4x + 1)^3$.

— Développer et réduire les expressions suivantes :

213. $(3x + 2y)^2 + (3x - 2y)^2 - (x + 3y)(x - 3y)$.

214. $(a + 1)(b + 1)(a + b) - a(b + 1)^2 - b(a + 1)^2$.

215. $(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] + 6abc$.

216. $(x + 2y + 3z)^2 + (2y + 3z - x)^2 + (3z + x - 2y)^2 + (x + 2y - 3z)^2$.

217. $(2x + 3y + z)^2 + (3x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y - 3z)^2$.

218. $(a + 2b + 3c)(6bc + 3ca + 2ab) - (a + 2b)(2b + 3c)(3c + a)$.

219. $(3x + 4y)^2 + (4x - 3y)^2 + (x - 7y)(x + 7y)$.

220. $(6x + 2y + 6z)^2 + (2x + 3y + 3z)^2 - (6x + 3y + 7z)^2$.

221. $(9x - 4y + 8z)^2 - (4x - y + 4z)^2 - (8x - 4y + 7z)^2$.

IDENTITÉS REMARQUABLES

71. Définition. — ***Une identité est l'égalité de deux expressions algébriques équivalentes.***

Une identité est donc vérifiée quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres. Ces lettres pourront d'ailleurs représenter indifféremment des nombres ou des expressions algébriques.

72. Carré de la somme de deux termes. — Soit à calculer $(a + b)^2$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

D'où l'identité : $$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad (1)$$

APPLICATIONS. — 1° *Calculer* $(3x + 5)^2$.

Remplaçons dans l'identité (1) a par $3x$ et b par 5. Nous obtenons :

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25.$$

2° $(2x^2 + 3y)^2 = (2x^2)^2 + 2 \times 2x^2 \times 3y + (3y)^2 = 4x^4 + 12x^2y + 9y^2.$

3° $$\left(\frac{2}{5}ax^2 + \frac{3}{4}by\right)^2 = \left(\frac{2}{5}ax^2\right)^2 + 2\left(\frac{2}{5}ax^2\right)\left(\frac{3}{4}by\right) + \left(\frac{3}{4}by\right)^2$$
$$= \frac{4}{25}a^2x^4 + \frac{3}{5}abx^2y + \frac{9}{16}b^2y^2.$$

73. Carré de la différence de deux termes.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$$

D'où l'identité : $$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \quad (2)$$

Remarquons que cette identité est une conséquence de l'identité (1). Il suffit de remplacer $+ b$ par $- b$ et par suite $+ 2ab$ par $- 2ab$. Le terme $+ b^2$ ne change pas car $(- b)^2 = + b^2$.

EXEMPLES. — 1° *Calculer* $(2x - 3)^2$.

Remplaçons dans l'identité (2) a par $2x$ et b par 3, nous obtenons :

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

Ce résultat s'obtient aussi en remplaçant dans l'identité (1), a par x et b par $- 3$:

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times (-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

2° $$\left(3x^2 - \frac{2}{5}y^3\right)^2 = (3x^2)^2 - 2 \times 3x^2 \times \frac{2}{5}y^3 + \left(\frac{2}{5}y^3\right)^2$$
$$= 9x^4 - \frac{12}{5}x^2y^3 + \frac{4}{25}y^6.$$

74. Produit de la somme de deux nombres par leur différence.

Soit à calculer : $(a + b)(a - b)$ Nous obtenons :

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2.$$

D'où l'identité : $$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \qquad (3)$$

EXEMPLES.

1° $$(2x + 5)(2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25.$$

2° $$\left(4a^2x + \frac{2}{3}y\right)\left(4a^2x - \frac{2}{3}y\right) = \left(4a^2x\right)^2 - \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = 16a^4x^2 - \frac{4}{9}y^2.$$

75. Autres identités. — Les identités suivantes pourront être vérifiées à titre d'exercices :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Il suffit d'effectuer les calculs indiqués dans le premier membre pour obtenir le second. Signalons aussi les identités suivantes qui sont des conséquences des identités (1) et (2) :

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

76. Sommes de plusieurs termes.

1° *Soit à calculer :* $(2x - 3y + 5)^2$.

Si on ne veut pas employer la première identité du n° 75, on peut écrire :

$$(2x - 3y + 5)^2 = [(2x - 3y) + 5]^2 = (2x - 3y)^2 + 10(2x - 3y) + 25.$$

Soit : $(2x - 3y + 5)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y + 25$.

2° *Soit à calculer :* $(2a + 5b + 3)(2a + 5b - 3)$.

Ce produit est égal à :

$$[(2a + 5b) + 3]\,[(2a + 5b) - 3] = (2a + 5b)^2 - 3^2.$$

Soit : $(2a + 5b + 3)(2a + 5b - 3) = 4a^2 + 20ab + 25b^2 - 9$.

77. Applications au calcul mental.

1° Carré d'un nombre terminé par 1 ou 9.

$$(41)^2 = (40 + 1)^2 = (40)^2 + 2 \times 40 + 1^2 = 1\,600 + 80 + 1 = 1\,681.$$
$$(29)^2 = (30 - 1)^2 = (30)^2 - 2 \times 30 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841.$$

2° Carré d'un nombre terminé par 5. Soit d le nombre des dizaines. Le nombre considéré s'écrit : $10d + 5$.

$$(10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100d(d + 1) + 25.$$

Soit $\boxed{(10d + 5)^2 = d(d + 1) \text{ centaines} + 25 \text{ unités}}$

On voit ainsi que : $75^2 = 7 \times 8$ centaines $+ 25 = 5\,625$
$125^2 = 12 \times 13$ centaines $+ 25 = 15\,625$.

3° Produit de deux nombres différents.

$$32 \times 28 = (30 + 2)(30 - 2) = 900 - 4 = 896.$$
$$28 \times 22 = (25 + 3)(25 - 3) = 625 - 9 = 616.$$
$$57 \times 43 = (50 + 7)(50 - 7) = 2\,500 - 49 = 2\,451.$$

EXERCICES

– Calculer mentalement :

222. $(19)^2$; $(31)^2$; $(45)^2$; 43×37; 23×27.

223. $(51)^2$; $(79)^2$; $(85)^2$; 53×67; 42×48.

224. $(98)^2$; $(82)^2$; $(105)^2$; 81×89; 66×84.

— **Vérifier les identités suivantes :**

225. $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.

226. $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$.

227. $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = (ax + by)(ay + bx)$.

228. $ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2) = (ax - by)(ay + bx)$.

229. $a(bz - cy) + b(cx - az) + c(ay - bx) = 0$.

230. $(a + b + c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 + (a + b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

231. $(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

232. $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$.

233. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$.

234. $(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = a^6 - b^6$.

235. $(a^2 - 2b^2)(a^2 + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) = a^8 - 16b^8$.

236. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

237. $(a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) = a^3 + b^3 + c^3$.

— **Calculer les expressions suivantes :**

238. $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}y^2\right)^2$

239. $\left(\frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}y^3\right)^2$.

240. $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{5}y\right)\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}y\right)$.

241. $\left(\frac{3}{5}a^3x^2 - \frac{2}{7}b^4y\right)\left(\frac{3}{5}a^3x^2 + \frac{2}{7}b^4y\right)$.

242. $\left(\frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y + 1\right)\left(\frac{3}{2}x + \frac{4}{5}y - 1\right)$.

243. $\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y + 2\right)\left(\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}y - 2\right)$.

244. $2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a)$.

245. $(x + y + z)(x + y - z)(z + x - y)(z + y - x) + (x^2 + y^2 - z^2)^2$.

246. $(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - (a + b + c)^3$.

247. $(a + b + c)[(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 - 4(ab + bc + ca)]$.

248. $(x - y)(y - z)(z - x) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$.

249. $(2x + 3x + z)(2x + 3y - z)(z + 2x - 3y)(z + 3y - 2x) + (4x^2 + 9y^2 - z^2)^2$.

250. $(3x - 2y + z)^3 + 3(3x - 2y)(3x + z)(2y - z)$.

DIVISION DES MONÔMES ET DES POLYNÔMES

78. Définitions. — Le quotient de deux monômes ou polynômes A et B s'indique par l'*expression* $\frac{A}{B}$ *appelée fraction rationnelle.*

Lorsqu'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ se réduit à un monôme ou à un polynôme, on dit que le *polynôme* (ou *monôme*) A est *divisible par le polynôme* (ou *monôme*) B.

79. Division de monômes. — L'égalité : $3a^4x^3y = 2a^3xy \times \frac{3}{2}ax^2$ montre que le quotient de $3a^4x^3y$ par $2a^3xy$ est le monôme $\frac{3}{2}ax^2$. Nous pouvons écrire : $3a^4x^3y : 2a^3xy$ ou $\frac{3a^4x^3y}{2a^3xy} = \frac{3}{2}ax^2$.

De la règle de multiplication des monômes il résulte que :

Lorsqu'un monôme dividende est divisible par un monôme diviseur :

1° Le quotient est un monôme dont le coefficient est égal au quotient des coefficients du dividende et du diviseur.

2° L'exposant d'une lettre dans le quotient est égal à son exposant dans le dividende diminué de son exposant dans le diviseur.

$$\frac{-\frac{3}{2}a^3x^5y}{\frac{5}{4}a^3x^2} = -\frac{3}{2} \times \frac{4}{5}a^{3-3}x^{5-2}y = -\frac{6}{5}x^3y.$$

Nous voyons d'autre part apparaître la condition suivante :

Pour que le quotient de deux monômes soit un monôme, il faut et il suffit que le dividende contienne toutes les lettres du diviseur avec des exposants au moins égaux.

Ainsi les quotients suivants ne se réduisent pas à des monômes :

$$1^{\circ}\quad \frac{2a^3x^2}{3axy^2} = \frac{2}{3}\frac{a^2x}{y^2} \qquad 2^{\circ}\quad \frac{5a^3x^2}{4ax^4} = \frac{5}{4}\frac{a^2}{x^2}.$$

80. Division d'un polynôme par un monôme. — L'égalité :

$$6a^3x^2y - 5a^3x^4 + 2a^4x^2y = 2a^3x^2.\left(3y - \frac{5}{2}x^2 + ay\right)$$

permet d'écrire : $\dfrac{6a^3x^2y - 5a^3x^4 + 2a^4x^2y}{2a^3x^2} = 3y - \dfrac{5}{2}x^2 + ay.$

Le quotient du polynôme dividende par le monôme diviseur est un polynôme. D'après la règle n° 79, il est clair que les termes du quotient sont les quotients des termes du dividende par le diviseur. D'où la condition :

Pour qu'un polynôme soit divisible par un monôme, il faut et il suffit que tous ses termes soient divisibles par ce monôme.

L'égalité : $6x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = (2x + 1)(3x^2 + 4)$

montre que : $\dfrac{6x^3 + 3x^2 + 8x + 4}{2x + 1} = 3x^2 + 4.$

Le quotient de deux polynômes est parfois un polynôme ou un monôme.

DÉCOMPOSITION EN FACTEURS

81. Définition. — Un polynôme étant donné, il est souvent utile de pouvoir l'écrire sous forme d'un produit de facteurs (monômes et polynômes).

Cette opération est appelée *décomposition en facteurs* ou *factorisation du polynôme.* Ainsi : $2a^2x + 4ab$

se décompose : $2a^2x + 4ab = 2a(ax + 2b).$

Comme le degré du polynôme est la somme des degrés de chacun des facteurs le nombre de ceux-ci est toujours limité.

82. Mise en facteur d'un monôme dans un polynôme. — Considérons le polynôme : $6\,a^3x^2y - 5\,a^3x^4 + 2\,a^4\,x^2y.$

Tous les termes sont divisibles par ax^2. Nous pouvons donc écrire :

$$6\,a^3x^2y - 5\,a^3x^4 + 2\,a^4x^2y = ax^2.\,(6\,a^2y - 5\,a^2x^2 + 2\,a^3y).$$

On dit que le *monôme ax^2 a été mis en facteur commun* dans le polynôme. Comme tout monôme ainsi factorisé doit être un diviseur de chacun des termes du polynôme, il en résulte que :

Le monôme de plus haut degré possible pouvant être mis en facteur dans un polynôme est formé des lettres communes à tous les termes du polynôme, chacune d'entre elles étant affectée de son plus petit exposant.

Le coefficient de ce monôme est d'ailleurs arbitraire.

Ainsi dans l'exemple précédent nous pouvons mettre $-3\,a^3x^2$ en facteur :

$$6\,a^3x^2y - 5\,a^3x^4 + 2\,a^4x^2y = -3\,a^3x^2.\left(-2y + \frac{5}{3}\,x^2 - \frac{2}{3}\,ay\right).$$

83. Autres procédés de factorisation d'un polynôme. — Il n'y a pas de procédé général applicable à tous les cas pour mettre une expression en facteur dans un polynôme. Les procédés les plus employés sont les suivants :

1° **Utilisation des identités remarquables.**

$$4\,x^2 - 12\,x + 9 = (2\,x)^2 - 2 \times 2\,x \times 3 + 3^2 = (2\,x - 3)^2.$$
$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)\,(x - 5).$$
$$25\,a^2x^4 - 4\,b^2 = (5\,ax^2)^2 - (2\,b)^2 = (5\,ax^2 + 2\,b)\,(5\,ax^2 - 2\,b).$$

2° **Groupement des termes ayant un facteur commun.**

$$ax + by + ay + bx = (ax + ay) + (bx + by) = a\,(x + y) + b\,(x + y) = (a + b)\,(x + y)$$
$$x^2 - ax + bx - ab = x\,(x - a) + b\,(x - a) = (x - a)\,(x + b).$$
$$a\,(x^2 + 1) + x\,(a^2 + 1) = ax^2 + a^2x + a + x = ax\,(a + x) + (a + x) = (ax + 1)\,(a + x).$$

3° **Utilisation successive des méthodes précédentes.**

$$a^2 + b^2 - c^2 + 2\,ab = (a^2 + 2\,ab + b^2) - c^2 = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)\,(a + b - c)$$
$$x^2 - 12\,x + 20 = (x^2 - 12\,x + 36) - 16 = (x - 6)^2 - 4^2 = (x - 6 + 4)\,(x - 6 - 4) = (x - 2)\,(x - 10).$$

Remarque. — Pour décomposer un polynôme il faut toujours commencer par la mise en facteur du monôme de plus haut degré possible puis essayer ensuite l'une des méthodes précédentes.

EXERCICES

— Calculer les quotients de :

251. $\frac{2}{5}a^4x^5y^3$ par $-\frac{3}{2}a^2x^4y$.

252. $-\frac{4}{3}a^2b^5c^4$ par $-\frac{2}{5}a^2b^3c$.

253. $\frac{5}{7}a^4x^3y^5$ par $-\frac{2}{21}a^2x^2y$.

254. $-\frac{6}{35}a^4x^6y^5$ par $-\frac{2}{7}a^2xy^3$.

255. $12x^5 - 18x^4 + 9x^3 + 3x^2$ par $-\frac{3}{2}x^2$.

256. $8a^4x^3 - 12a^3x^2 + 6a^2x^4 - 10a^2x$ par $-\frac{4}{3}a^2x$.

257. $-\frac{15}{2}a^3bx^4 + \frac{10}{3}ab^4x^3 - \frac{5}{2}a^2bx^2 + 20abx^2$ par $-\frac{5}{3}abx^2$.

— Mettre en facteur le monôme de plus haut degré possible dans les expressions

258. $4x^5 - 7x^6 + 3x^4 - 2x^3$

259. $\frac{6}{7}a^3b^4x^5 - \frac{5}{2}a^2b^5x^3 + \frac{3}{4}a^4b^6x^5$.

260. $5a^4x^3 - 3a^2x^5 + 7a^3x^3$

261. $\frac{4}{3}a^3b^2x^5y^3 - \frac{5}{9}a^5b^4x^2y + 2a^3b^2x^4y^2$.

— Décomposer en un produit de facteurs les expressions suivantes :

262. $7x^4y^3 - 14x^3y^2 + 7x^2y^3$.

263. $9x^4 + 12x^3y + 4x^2y^2$.

264. $\frac{3}{7}a^3b^2x^2 - \frac{7}{3}a^3b^2y^2$.

265. $\frac{5}{4}a^3b^4x^4 - \frac{9}{5}a^5b^2y^2$.

266. $(3x + 7)^2 - 6x^2 - 14x$.

267. $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$.

268. $(3x + 4)^2 - (2x + 6)^2$.

269. $(2x - 3)^2 - 8x^2 + 18$.

270. $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)$.

271. $ab(x^2 - y^2) - xy(a^2 - b^2)$.

272. $(a^2 + b^2 - 5)^2 - (2ab - 4)^2$.

273. $(x^2 + 4y^2 - 10)^2 - (4xy + 6)^2$.

274. $(9a^2 + b^2 - 4c^2)^2 - 36a^2b^2$.

275. $(a^2 + b^2 - 20)^2 - (a^2 - b^2 - 12)^2$.

276. $x^2 - 10x - 24$.

277. $4x^2 + 12x - 27$.

278. Mettre $(a - b)$ en facteur dans l'expression :

$$A = ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$$

et achever la décomposition de A en un produit de trois facteurs.

279. Décomposer $(x + y)^2 - 4xy$ et calculer les nombres x et y tels que :

$$x + y = 110 \quad \text{et} \quad xy = 2\,961.$$

280. Décomposer $(x - y)^2 + 4xy$ et calculer les nombres x et y tels que :

$$x - y = 35 \quad \text{et} \quad xy = 2\,774.$$

281. 1° Décomposer $(x^2 + y^2) + 2xy$ et $(x^2 + y^2) - 2xy$.

2° Trouver les dimensions d'un rectangle sachant que sa diagonale mesure 185 m et sa surface 10 032 m².

FRACTIONS RATIONNELLES

84. Définition.— ***On appelle fraction rationnelle une fraction dont les deux termes sont des monômes ou des polynômes.***

Ainsi : $\frac{1}{x^2}$, $\frac{3x}{2x+3}$, $\frac{2x+5}{3x^2-5x}$, sont des fractions rationnelles.

La valeur numérique d'une fraction rationnelle est le quotient de la valeur du numérateur par celle du dénominateur. Par suite une fraction rationnelle ne peut se calculer lorsque la valeur du dénominateur est nulle.

Ainsi, la fraction $\frac{2x}{x-5}$ n'a pas de sens pour $x = 5$.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons que les valeurs des lettres pour lesquelles les fractions envisagées sont définies.

85. Propriété fondamentale. — ***Lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux termes d'une fraction rationnelle par une même expression algébrique, on obtient une fraction équivalente.***

En effet, d'après la propriété analogue des fractions numériques, la valeur numérique de la fraction rationnelle ne change pas. Ainsi :

$$\frac{2x}{x-2} \text{ équivaut à } \frac{2x(x-3)}{(x-2)(x-3)}; \qquad \frac{x^3}{x^2-5x} \text{ équivaut à } \frac{x^2}{x-5}.$$

86. Simplification d'une fraction rationnelle. — Pour simplifier une fraction ordinaire on divise ses deux termes par un diviseur commun. On opère de même pour une fraction rationnelle. Afin d'apercevoir les facteurs communs aux deux termes, il faut donc commencer par décomposer ces termes en facteurs.

EXEMPLES : 1° $\dfrac{2a^3xy^2}{3x^3y^2} = \dfrac{2a^3 \times xy^2}{3x^2 \times xy^2} = \dfrac{2a^3}{3x^2}$.

2° $\dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \dfrac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{3x}{x+2}$.

3° $\dfrac{3x^2 - 27}{x+3} = \dfrac{3(x+3)(x-3)}{x+3} = 3(x-3)$.

On voit, d'après le dernier exemple, qu'une fraction rationnelle se réduit parfois à un polynôme.

87. Réduction au même dénominateur. — Lorsqu'il s'agit de fractions ordinaires ou de fractions à dénominateurs numériques, il suffit de prendre pour dénominateur un multiple commun à tous les dénominateurs. On procède d'une façon analogue pour les fractions rationnelles.

1er EXEMPLE : $\dfrac{5}{14}$; $\dfrac{4x}{21}$ et $\dfrac{3x-1}{6}$.

Soit $\dfrac{5}{2.7}$; $\dfrac{4x}{3.7}$ et $\dfrac{3x-1}{2.3}$.

On peut prendre pour dénominateur commun le produit $2 \times 3 \times 7 = 42$.

On obtient : $\dfrac{15}{42}$; $\dfrac{8x}{42}$ et $\dfrac{7(3x-1)}{42}$.

2e EXEMPLE : $\dfrac{x^2}{x^3}$; $\dfrac{6x}{2(x+1)}$ et $\dfrac{1}{x^2+x}$.

Simplifions d'abord ces fractions :

$\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{3x}{x+1}$ et $\dfrac{1}{x(x+1)}$.

Nous pouvons prendre comme dénominateur commun le produit : $x(x+1)$.

Nous obtenons : $\dfrac{x+1}{x(x+1)}$; $\dfrac{3x^2}{x(x+1)}$ et $\dfrac{1}{x(x+1)}$.

Il y a toujours avantage à obtenir le dénominateur de plus faible degré possible.

88. Somme algébrique de fractions rationnelles. — La somme algébrique de plusieurs fractions rationnelles de même dénominateur s'obtient, comme pour les fractions ordinaires, en formant la fraction qui a pour numérateur la somme algébrique des numérateurs et pour dénominateur le dénominateur commun.

La marche à suivre dans le cas le plus général est donc la suivante :

1° Décomposer en facteurs les termes des fractions et simplifier si possible ces fractions.

2° Réduire les fractions au même dénominateur.

3° Faire la somme algébrique des numérateurs en conservant le dénominateur commun.

4° Réduire et simplifier si possible le résultat.

EXEMPLES : 1° *Effectuer :* $\frac{5}{14} - \frac{4x}{21} + \frac{3x-1}{6}$.

Nous obtenons : $\frac{5}{2.7} - \frac{4x}{3.7} + \frac{3x-1}{2.3} = \frac{5.3}{2.3.7} - \frac{2.4x}{2.3.7} + \frac{7(3x-1)}{2.3.7} =$

$$= \frac{15 - 8x + 21x - 7}{2.3.7} = \frac{13x+8}{42}.$$

2° $\frac{x^2}{x^3} + \frac{6x}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{3x}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} =$

$$= \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{3x^2}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1+3x^2-1}{x(x+1)} = \frac{3x^2+x}{x(x+1)} = \frac{3x+1}{x+1}.$$

89. Multiplication et division des fractions rationnelles. — Pour multiplier des fractions rationnelles on multiplie les numérateurs et les dénominateurs entre eux.

Pour diviser deux fractions rationnelles, on multiplie la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.

Ces règles sont les conséquences des règles analogues relatives aux fractions ordinaires. Ne pas oublier de simplifier, si possible, les résultats avant d'effectuer les produits.

EXEMPLES : 1° $\frac{a}{2} \times \frac{a+1}{6} \times \frac{4a}{a^2-1} =$

$$= \frac{a(a+1) \times 4a}{2 \times 6(a^2-1)} = \frac{4a^2(a+1)}{12(a^2-1)} = \frac{4a^2(a+1)}{12(a-1)(a+1)} = \frac{a^2}{3(a-1)}.$$

2° $\frac{x^2}{x^2-1} : \frac{x+2}{x-1} = \frac{x^2}{x^2-1} \times \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2(x-1)}{(x^2-1)(x+2)} =$

$$= \frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)}.$$

EXERCICES

— Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

282. $\frac{5a^3x^7}{2b^2x^4}$. **283.** $\frac{-15a^4b^6x^2}{25a^4b^2x^3}$. **284.** $\frac{91x^3y^3z^4}{-65x^4y^2z^3}$.

285. $\frac{7x^3}{14x^2-21x}$. **286.** $\frac{3x^3+12x^2}{5x^4+20x^3}$. **287.** $\frac{4x^2-4ax}{5x^3-5ax^2}$.

288. $\frac{x^2+1}{x^4-1}$. **289.** $\frac{x^3-x}{x^3+2x^2+x}$. **290.** $\frac{x^6+2a^3x^3+a^6}{x^7-a^6x}$.

— Calculer les expressions suivantes :

291. $\frac{2x+1}{6}+\frac{15x-35}{12}-\frac{9x-1}{2}$. **292.** $\frac{2(x-3)}{78}-\frac{4(3x-1)}{13}-x+1$.

293. $\frac{1}{x(x+1)}-\frac{x}{x+1}+2$. **294.** $\frac{4x^2}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}-\frac{4x}{4x^2-1}$.

295. $\frac{9a}{9a+3}-\frac{6a}{3a-1}-\frac{3a+3}{9a^2-1}$. **296.** $\frac{2x}{x^2+2x}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x^2-4}$.

297. $\frac{5}{4x-4}-\frac{4}{5x+5}-\frac{9x+41}{20x^2-20}$. **298.** $\frac{x-1}{(x+2)^2-1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+1}$.

299. $\frac{7}{x+1}+\frac{4}{x-1}-\frac{11}{x}$. **300.** $\frac{a^2}{a^2+a}-\frac{2a}{a-1}+\frac{a+3}{a^2-1}$.

— Simplifier les expressions suivantes :

301. $\frac{2}{3x-3}\times\frac{5}{x+1}\times\frac{x^2-1}{5x}$. **302.** $\frac{x^4-1}{x^2}\times\frac{x^2}{x^2+1}\times\frac{x^2}{x^2-1}$.

303. $\frac{x-1}{2x}\times\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)$. **304.** $\frac{1}{x^4-2x^2y}\times\frac{4}{x^4}\times\frac{x^4-4y^2}{5}$.

305. $\dfrac{\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}}$. **306.** $\dfrac{\frac{x+3}{1-3x}+\frac{x-3}{1+3x}}{1-\frac{x^2-9}{1-9x^2}}$.

307. $\dfrac{x^2+\frac{1}{x^2}-2}{x^2-\frac{1}{x^2}}$. **308.** $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x+1}{2x-1}}{\frac{2x+1}{x-1}-\frac{x+1}{2x-1}}$.

309. On donne l'expression :

$$E=\frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{1+2x+x^2}-\frac{1-2x}{1-x}.$$

1° Calculer la valeur numérique de E pour les valeurs $x=0$; $x=\frac{1}{2}$; $x=-1$.

2° Simplifier l'expression E et calculer à nouveau les valeurs numériques de E pour les mêmes valeurs de x. *(B.E.P.C).*

310. 1° Simplifier chacune des fractions :

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \qquad B = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 2y + 1}.$$

2° Calculer A — B et mettre cette différence sous la forme d'une fraction rationnelle.
(E.N.)

311. 1° Mettre le polynôme $4x^2 - 12x + 9$ sous la forme d'un carré de binôme.

2° Montrer que l'expression : $S = \frac{20x}{4x^2 - 9} + \frac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{5x}{2x^2 + 3x}$

se réduit, après simplification, à la forme $\frac{A}{ax + b}$; A, a, b étant des nombres indépendants de x que l'on déterminera. *(E. N.)*

312. 1° Simplifier l'expression :

$$E = \frac{9x^2 - 6x + 1}{5 - x} \times \frac{5(x - 2) - x(x - 2)}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{1}{3x - 1}.$$

2° Calculer la valeur numérique de E : *a*) pour $x = \frac{1}{3}$; *b*) pour $x = 2$.

Déterminer x pour que l'on ait $E = -2$. *(B.E.P.C.)*

313. 1° Simplifier la fraction : $A = \frac{(3x - 12)(1 - x^2)}{(2x - 8)(x + 1)^2}$

et préciser pour quelles valeurs de x cette simplification n'est pas légitime.

2° Calculer x en sorte que :

a) $A = 0$; *b*) $A = +1$; *c*) $A = \frac{2}{3}$; *d*) $A = -\frac{3}{2}$. *(B. E. P. C.)*

314. 1° Décomposer en produits de facteurs du premier degré les expressions suivantes : $3x^2 - 6x$, $x^2 + 4x + 4$, $2x^2 - 8$, $9(2x + 1)^2 - (4x - 1)^2$.
Préciser soigneusement le détail de chaque calcul sur la copie.
2° Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}, \qquad B = \frac{9(2x + 1)^2 - (4x - 1)^2}{4(x^2 + 4x + 4)},$$

3° Effectuer A — B et déterminer pour quelle valeur de x on a : $A - B = 0$.
(B.E.P.C.)

315. 1° Développer l'expression suivante, réduire les termes semblables et écrire le résultat sous forme d'un produit de facteurs :

$$(2a + 2b)^2 + (2a - 2b)^2 - (3a + b)(3a - b).$$

Vérifier ce calcul en prenant $a = 3$, $b = 1$.
2° Calculer le plus simplement possible :

$$(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{3} - 2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{3} + \sqrt{5})(3\sqrt{3} - \sqrt{5}).$$

3° Simplifier la fraction : $\frac{(2a + 2b)^2 + (2a - 2b)^2 - (3a + b)(3a - b)}{9b^2 - 6ab + a^2}$.

4° Est-il possible que la fraction simplifiée n'ait aucun sens? soit nulle? soit égale à 5? *(B.E.P.C.)*

ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

90. Définitions. — ***On appelle équation une égalité qui n'est vérifiée que par certaines valeurs attribuées aux lettres qu'elle contient.*** Ces lettres sont les ***inconnues*** de l'équation.

1er Exemple. — L'égalité $3x - 7 = 8$ est une *équation à une inconnue.* Les deux membres ne sont égaux que si on attribue à cette inconnue la valeur $x = 5$. Cette valeur s'appelle *racine de l'équation.*

2e Exemple. — L'égalité $2x - 3y = 7$ est une *équation à deux inconnues;* les deux membres sont égaux si on attribue à x la valeur 2 et à y la valeur -1. Le système de valeurs $x = 2$, $y = -1$ est une *solution de l'équation.* En général :

On appelle racine d'une équation à une inconnue toute valeur de cette inconnue pour laquelle l'équation devient une égalité numérique.

On appelle solution d'une équation à plusieurs inconnues tout système de valeurs attribuées à ces inconnues, pour lequel l'équation devient une égalité numérique.

Résoudre une équation, c'est en trouver les *racines* ou les *solutions.*

On utilise à cet effet les théorèmes sur les égalités. On transforme ainsi l'équation donnée en une autre admettant les mêmes solutions.

91. Théorème I. — ***On peut ajouter ou retrancher une même expression aux deux membres d'une équation.***

De l'équation : $3x + 7 - x^2 = 28 - x^2 - 2x$, on peut déduire en ajoutant l'expression $x^2 + 2x$ aux deux membres : $5x + 7 = 28$.

92. 1re Application. — ***Dans une équation on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre, à condition de changer le signe qui le précède.***

Soit l'équation : $$3x + 7 = 28 - 2x. \quad (1)$$

Ajoutons $2x - 7$ aux deux membres :

$$3x + 7 + 2x - 7 = 28 - 2x + 2x - 7.$$

Soit : $$3x + 2x = 28 - 7. \quad (2)$$

Les termes $-2x$ et $+7$ de l'équation (1) ont changé de membre et sont devenus $+2x$ et -7 dans l'équation (2). *Cette opération se nomme transposition.*

93. 2e Application. — Degré d'une équation entière.

Si les deux membres d'une équation sont des polynômes, on dit que l'équation est entière.

En faisant passer tous les termes dans le 1er membre, l'autre se réduit à zéro. Le degré, par rapport à l'ensemble des inconnues du polynôme ainsi obtenu dans le 1er membre, est le degré de l'équation.

Ainsi : $3x + 7 = 0$ *est du premier degré.*
$4x^2 - 5x - 1 = 0$ *est du second degré.*
$5x - 4y + 7 = 0$ *est du premier degré.*
$xy + 3x - 4y - 1 = 0$ *est du second degré.*

94. Théorème II. — ***On peut ajouter ou retrancher membre à membre des équations admettant les mêmes solutions.***

Si les équations : $$\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

admettent une solution commune, il en est de même de la suivante :

$$(5x - 2y) + (x + 2y) = 3 + 5.$$

Soit : $$6x = 8.$$

95. Théorème III. — ***On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par un même nombre différent de zéro.***

Ainsi, de l'équation : $$\frac{x+5}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{x}{3} \quad (1)$$

on peut, en multipliant les deux membres par 12, déduire la suivante :

$$3(x+5) - 2(x-3) = 4x \quad (2)$$

96. 1re Application. — *On peut supprimer les dénominateurs d'une équation en multipliant ses termes par un multiple commun des dénominateurs.*

L'exemple précédent montre en effet qu'on passe de l'équation (1) à l'équation (2) en multipliant les termes de la première par 12, multiple commun de 3, 4 et 6.

97. 2e Application. — *On peut simplifier une équation en divisant ses termes par un même nombre différent de zéro.*

Soit : $$25x - 20 = 15x + 10.$$

Divisons les deux membres par 5 :

$$5x - 4 = 3x + 2.$$

98. Remarques.

1° Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une équation par une expression qui contient l'inconnue, l'équation obtenue peut admettre des racines qui ne vérifient pas l'équation primitive.

Soit l'équation : $$3x - 2 = 0. \qquad (1)$$

Multiplions les deux membres par $x - 1$:

$$(3x - 2)(x - 1) = 0. \qquad (2)$$

On vérifie que $x = 1$ est racine de l'équation (2), mais pas de l'équation (1).

2° Lorsqu'on divise les deux membres d'une équation par une expression qui contient l'inconnue, l'équation primitive peut admettre des racines qui ne vérifient pas la nouvelle équation obtenue.

Soit l'équation : $$x^2 - 5x = 3x. \qquad (1)$$

Divisons les deux membres par x :

$$x - 5 = 3. \qquad (2)$$

On vérifie que $x = 0$ est racine de l'équation (1) mais pas de l'équation (2).

99. Résolution de l'équation entière du premier degré à une inconnue.

1er Exemple. — *Soit à résoudre l'équation* :

$$3(x + 4) - 5(x - 2) = 4(3x - 1) + 82.$$

Réduisons chaque membre; nous obtenons

$$3x + 12 - 5x + 10 = 12x - 4 + 82$$

soit : $$-2x + 22 = 12x + 78$$

Faisons passer les termes qui contiennent x dans le premier membre et les termes indépendants de x dans le deuxième (théorème I) :

$$-2x - 12x = -22 + 78$$

ou

$$-14x = 56.$$

Divisons les deux membres par — 14 (théorème III) :

$$x = \frac{56}{-14} \implies x = -4.$$

L'équation proposée a pour racine : $x = -4$.

VÉRIFICATION : $3(-4 + 4) - 5(-4 - 2) = 4(-12 - 1) + 82$

ou

$$+30 = +30$$

100. 2[e] *Exemple.* — *Soit à résoudre l'équation* :

$$\frac{3x - 4}{5} = \frac{x}{3} - \frac{4}{15}.$$

Multiplions les deux membres par 15 (théorème III) :

$$3(3x - 4) = 5x - 4$$

soit

$$9x - 12 = 5x - 4.$$

Transposons :

$$9x - 5x = 12 - 4$$

soit

$$4x = 8.$$

Donc :

$$x = \frac{8}{4} \implies x = 2.$$

VÉRIFICATION : $\dfrac{6 - 4}{5} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{15}$ ou $\dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{15}$.

101. Résumé. — La marche à suivre est donc la suivante :

1° ***Supprimer les dénominateurs*** (s'il y a lieu) en multipliant chaque terme par un multiple commun des dénominateurs.

2° ***Réduire les deux membres*** de l'équation obtenue.

3° ***Faire passer dans un membre les termes qui contiennent l'inconnue et dans l'autre membre les termes qui ne la contiennent pas.***

4° ***Pour obtenir la racine, diviser le terme connu par le coefficient de l'inconnue.***

EXERCICES

— Résoudre les équations suivantes :

316. $5(2x - 1) - 4(5x - 2) = 19 - 2(x + 12)$.

317. $7(2x - 5) - (4x - 11) = 9(x - 6) + 29$.

318. $19 - 15(3x + 1) = 36 - 6(5x - 3) - 5(x + 7)$.

319. $23x + 17(x - 3) = 8(1 - 5x) - 59$.

320. $7x + 4{,}5 + 3(x - 4) = 4(3x - 0{,}25) + 6{,}5$.

321. $13{,}7x - 73{,}25 + 25{,}8(x - 5) = 80{,}33 - 17{,}1(x - 3{,}5)$.

322. $(2x - 1)^2 + (3x + 5)^2 = 13(x + 1)(x - 1) + 143$.

323. $7(2x - 1)(x + 3) + 5x + 47 = 14(x + 1)^2$.

324. $(13x - 4)(x + 2) = (3x + 1)(5x - 3) - (2x^2 + 5)$.

325. $7(5 - 2x) - 5(x - 2)(2x - 5) = (5x - 7)(5 - 2x)$.

326. $(4x - 1)^2 - (3x + 2)^2 = (x\sqrt{7} + 1)(x\sqrt{7} - 1)$.

327. $x^3 + (x + 2)^3 + (x - 2)^3 = 3x(x + 2)(x - 2)$.

— Résoudre les équations suivantes :

328. $\frac{15x}{2} + 2 - \frac{21x}{4} = 3x + \frac{1}{4}$.

329. $\frac{3x}{14} - \frac{x}{15} + 1 = \frac{x}{6} + \frac{7}{3}$.

330. $\frac{x}{5} + \frac{7}{2} - \frac{x}{30} = \frac{58}{3} - \frac{2x}{45}$.

331. $\frac{7x}{8} - \frac{x}{13} = x + \frac{189}{52}$.

332. $\frac{2x}{9} + \frac{21}{5} - \frac{2x}{15} = \frac{x}{6} - \frac{x}{9} + 3{,}7$.

333. $\frac{x}{78} - 53 = \frac{x}{52} - \frac{x}{39} - 1$.

— Résoudre les équations suivantes :

334. $\frac{3x - 14}{16} + \frac{x + 2}{24} = -4$.

335. $\frac{x}{5} - \frac{x + 6}{15} = \frac{2(x + 5)}{25}$.

336. $\frac{21 - x}{36} + \frac{11}{4} = 2\left(\frac{x}{3} - 1\right) + \frac{5(15 - 2x)}{12}$.

337. $\frac{x}{55} - \frac{3x - 11}{66} + \frac{33 - x}{44} = 0$.

338. $\frac{x + 3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5x + 27}{9} - \frac{7x - 9}{4} + 10$.

339. $\frac{2x - 49}{35} + \frac{x + 77}{14} = -\frac{28}{7}$.

340. $\frac{x}{9} - \frac{x - 18}{36} = \frac{2x + 9}{9} - 18$.

341. $\frac{5x - 21}{28} - \frac{x - 5}{9} = \frac{x + 133}{42}$.

342. $\frac{2x + 1}{8} - \frac{2x - 5}{15} = \frac{4(4x - 15)}{45}$.

343. $\frac{6x - 7}{21} - \frac{15x + 14}{49} = \frac{3x}{7} - \frac{49}{3}$.

344. $\frac{8x + 34}{85} - \frac{x - 187}{119} = \frac{5x - 51}{34} - \frac{3x - 17}{68}$.

345. $\frac{2x - 35}{45} - \frac{x - 25}{30} = \frac{x - 21}{25}$.

346. $\frac{5x + 56}{32} - \frac{3x + 40}{64} = \frac{x + 18}{10} - \frac{x - 72}{24}$.

347. $\frac{x + 18}{21} - \frac{x + 5}{20} = \frac{x + 240}{75}$.

348. $\frac{4x + 217}{155} - \frac{x - 155}{186} = \frac{2x + 434}{93} - \frac{2x - 217}{279}$.

349. $\frac{(x - 2)(x + 10)}{12} - \frac{(x + 4)(x + 10)}{48} = \frac{(x - 2)(x + 4)}{16}$.

350. $\frac{(x + 2)^2}{5} + \frac{(x - 5)^2}{3} = \frac{(4x + 1)(2x - 1)}{15} + 14$.

351. $\frac{(4x + 7)(3x - 1)}{6} - \frac{(5x - 1)(2x + 3)}{7} = \frac{(6x + 13)(2x - 1)}{21}$.

352. $\frac{(x + 6)(x - 4)}{40} - \frac{(x + 4)(x - 2)}{56} = \frac{(x - 6)(x + 4) + 16}{140}$.

353. $\left(8x - \frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{5}\right) = 16\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$.

354. $\frac{(x - 1)^2}{3} + \frac{(x - 2)(x + 3)}{2} = \frac{(5x - 1)(x - 4)}{6}$.

355. $\frac{(x + 2)^2}{8} - 2(2x + 1) = 25 + \frac{(x - 2)^2}{8}$.

ÉQUATIONS QUI SE RAMÈNENT AU PREMIER DEGRÉ

102. Équations de la forme A.B.C = 0.

1er EXEMPLE. — *Résoudre l'équation* : $(x - 1)(3x + 1)(x - 2) = 0$.

On sait que : *Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.* L'équation donnée se décompose donc en trois autres :

$$\begin{cases} x - 1 = 0 & \text{dont la } \textit{racine} \text{ est : } x = 1. \\ 3x + 1 = 0 & \text{dont la } \textit{racine} \text{ est : } x = -\frac{1}{3}. \\ x - 2 = 0 & \text{dont la } \textit{racine} \text{ est : } x = 2. \end{cases}$$

L'équation proposée admet trois racines : $x = 1$; $x = -\frac{1}{3}$; $x = 2$.

103. 2e Exemple. — *Résoudre l'équation* : $5x^2 + 7x = 0$.

Mettons x en facteur commun dans le 1er membre. Nous obtenons l'équation :

$$x(5x + 7) = 0.$$

Elle se décompose en :

$$\begin{cases} x = 0 & \textit{racine } x = 0 \\ 5x + 7 = 0 & \textit{racine } x = -\frac{7}{5}. \end{cases}$$

L'équation proposée admet deux racines : $x = 0$ et $x = -\frac{7}{5}$.

104. 3e Exemple. — *Résoudre l'équation* : $x^3 - x = 0$.

Elle s'écrit : $$x(x^2 - 1) = 0$$

ou $$x(x+1)(x-1) = 0.$$

Équation qui se décompose en : $$\begin{cases} x = 0 & \textit{racine} : x = 0 \\ x + 1 = 0 & \textit{racine} : x = -1 \\ x - 1 = 0 & \textit{racine} : x = 1. \end{cases}$$

L'équation proposée admet 3 racines : $x = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

D'une façon générale :

L'équation A.B.C = 0 ***admet pour racines celles des équations :***

$$A = 0; \quad B = 0; \quad C = 0.$$

105. Équations où l'inconnue figure en dénominateur.

1er Exemple. — *Résoudre l'équation* :

$$\frac{2x}{x+1} + \frac{3(x-1)}{x} = 5.$$

Elle n'a de sens que si les valeurs numériques des fractions $\frac{2x}{x+1}$ et $\frac{3(x-1)}{x}$ existent, ce qui impose les deux conditions :

$$x + 1 \neq 0 \quad \text{soit} \quad x \neq -1 \quad \text{et} \quad x \neq 0.$$

Réduisons les deux membres au dénominateur commun $x(x+1)$:

$$\frac{2x^2}{x(x+1)} + \frac{3(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{5x(x+1)}{x(x+1)}.$$

Nous pouvons multiplier les deux membres par $x(x+1)$ (n° 95). Nous obtenons :

$$2x^2 + 3(x-1)(x+1) = 5x(x+1).$$

Soit $$2x^2 + 3(x^2 - 1) = 5x^2 + 5x$$
$$5x^2 - 3 = 5x^2 + 5x.$$

Retranchons $5x^2$ aux deux membres (n° 91). Nous obtenons :

$$-3 = 5x \implies x = -\frac{3}{5}.$$

Les conditions $x \neq 0$; $x \neq -1$ sont satisfaites; l'équation proposée a pour racine : $x = -\frac{3}{5}$, ce qu'il est facile de vérifier.

106. 2e Exemple. $$\frac{8-5x}{4(x-2)}+\frac{x}{x+2}+1=0.$$

Nous devons poser les conditions :

$$x-2\neq 0 \quad \text{et} \quad x+2\neq 0;$$

Soit : $$x\neq 2 \quad \text{et} \quad x\neq -2.$$

Réduisons au dénominateur commun $4(x-2)(x+2)$:

$$\frac{(8-5x)(x+2)}{4(x-2)(x+2)}+\frac{4(x-2)x}{4(x-2)(x+2)}+\frac{4(x-2)(x+2)}{4(x-2)(x+2)}=0.$$

Multiplions les deux membres par ce dénominateur :

$$(8-5x)(x+2)+4(x-2)x+4(x-2)(x+2)=0.$$
$$(8x-5x^2+16-10x)+4(x^2-2x)+4(x^2-4)=0.$$

Soit : $$-5x^2-2x+16+4x^2-8x+4x^2-16=0.$$

Réduisons : $3x^2-10x=0$ ou $x(3x-10)=0.$

Équation qui se décompose en : $\begin{cases} x=0; & \textit{racine} : x=0. \\ 3x-10=0; & \textit{racine} : x=\dfrac{10}{3} \end{cases}$

Ces deux racines sont acceptables. En général :

Les racines de l'équation $\frac{A}{B}=0$ (où $\frac{A}{B}$ représente une fraction rationnelle) sont les racines de l'équation $A=0$ qui n'annulent pas B.

ÉQUATIONS LITTÉRALES

107. Cas général. — Si les coefficients d'une équation du 1er degré sont littéraux, on peut la ramener, après élimination des dénominateurs et réduction des termes inconnus dans un membre, des termes connus dans l'autre, à la forme :

$$ax=b.$$

1° Si $a\neq 0$, en divisant les deux membres par a, on obtient : $x=\frac{b}{a}$.

2° Si $a=0$, l'équation se réduit alors à : $0\times x=b$.

a) si $b\neq 0$, l'équation est ***impossible,*** sans quoi on aurait $0=b$.

b) si $b=0$, l'équation devient : $0\times x=0$.

Tout nombre x vérifie alors l'équation; on dit que l'équation est ***indéterminée*** (elle se réduit à une identité).

CONCLUSION : 1° $a \neq 0$ *l'équation admet une racine* : $x = \frac{b}{a}$

2° $a = 0$ $\begin{cases} b \neq 0 & \textit{équation impossible} \\ b = 0 & \textit{équation indéterminée.} \end{cases}$

108. Exemple d'équation impossible.

Considérons l'équation : $3x - 5 = 2(x - 1) + x$

soit : $3x - 5 = 3x - 2$ ou $3x - 3x = 5 - 2$

ce qui donne : $0x = 3$ donc *impossibilité.*

109. Exemple d'équation indéterminée.

Considérons l'équation : $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 8x$

ou : $(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = 8x$

ce qui donne : $8x = 8x$ ou $8x - 8x = 0$

soit $0x = 0$ donc *indétermination.*

EXERCICES

— **Résoudre les équations :**

356. $(2x + 5)(x - 3)(4x - 7) = 0$. **357.** $(5x + 9)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = 0$.

358. $(x\sqrt{2} + 1)(x\sqrt{2} - 1)(4 - 3x) = 0$. **359.** $\left(x - \frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{11}{9}\right)(x + 7\sqrt{2}) = 0$..

360. $3x^2 + 11x = 0$. **361.** $7x^2 - 21x = 0$. **362.** $5x^2 + \frac{7x}{5} = 0$.

363. $x^2\sqrt{2} + x = 0$. **364.** $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{5} = 0$. **365.** $\frac{4x^2}{9} - \frac{7x}{5} = 0$.

366. $x(x + 3) = (x + 3)$. **367.** $(3x - 7)(4x - 1) = (4x - 1)(x + 5)$

368. $(x + 5) = x^2 - 25$. **369.** $x - \sqrt{3} = x^2 - 3$.

370. $7(x + 2)(x + 5)(x - 4) = 4(x + 2)(x + 5)(x - 2)$.

371. $(2x + 5)(x + 1)(x - 3) = \left(x + \frac{5}{2}\right)(4x + 4)(x - 2)$.

— **Résoudre les équations :**

372. $25x^2 - 49 = 0$. **373.** $9x^2 - 7 = 0$. **374.** $3x^2 - 16 = 0$.

375. $81x^2 = 64$. **376.** $4x^2 = 45$. **377.** $5x^2 - 121 = 0$.

378. $(x + 3)^2 - (4x + 1)^2 = 0.$

379. $(5x - 3)^2 - (4x - 7)^2 = 0.$

380. $(9x + 5)^2 = 4x^2.$

381. $(3x - 1)^2 = 3x^2.$

382. $121(x + 1)^2 - 100(x - 1)^2 = 0.$

383. $2(x + 2)^2 = 4x^2.$

384. $9x^3 - 16x = 0.$

385. $(x - 3)(3x + 2)^2 = x^2(x - 3).$

386. $16x^3 - 45x = 0.$

387. $(2x + 1)(2x - 1)^2 = (x + 3)^2(2x + 1).$

388. $4x^3 - 4x^2 - 5x + 5 = 0.$

389. $(3x + 1)(4x - 1)^2 = (x + 7)^2(3x + 1)$

— Résoudre les équations :

390. $\dfrac{2x + 1}{x - 2} = \dfrac{6x + 24}{3x + 1}.$

391. $\dfrac{4x + 7}{5x - 1} = \dfrac{4x - 3}{5x - 7}.$

392. $\dfrac{5x - 7}{x + 2} = \dfrac{3}{4}.$

393. $\dfrac{4(1 - x)}{1 + 2x} = \dfrac{8}{5}.$

394. $\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1} = \dfrac{16}{x^2 - 1}.$

395. $\dfrac{2x + 3}{2x - 3} - \dfrac{2x - 3}{2x + 3} = \dfrac{12}{4x^2 - 9}.$

396. $\dfrac{10}{x - 3} = \dfrac{7}{x - 2} + \dfrac{3}{x - 5}.$

397. $\dfrac{11}{x} = \dfrac{9}{x + 1} + \dfrac{2}{x - 4}.$

398. $(x - 1)^2 = \dfrac{x^3}{x + 2}.$

399. $(x - 5)^2 = \dfrac{x^3}{x + 10}.$

400. $\dfrac{4x + 10}{x + 4} - \dfrac{x + 9}{3(x + 2)} = \dfrac{5x + 2}{x + 2}.$

401. $\dfrac{3x + 4}{10} - \dfrac{x}{5} = \dfrac{5x + 8}{10(x + 1)}.$

402. $\dfrac{3x + 5}{2x - 7} = \dfrac{2x - 7}{3x + 5}.$

403. $\dfrac{3x^2 - 4x + 7}{3x - 7} = \dfrac{5x^2 - 3x + 4}{5x - 4}.$

404. $\dfrac{1 + \dfrac{x}{x + 4}}{1 - \dfrac{x}{x + 4}} = 4.$

405. $\dfrac{\dfrac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} - \dfrac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}}{1 - \dfrac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$

406. 1° Déterminer m pour que l'équation : $mx^2 + (3m - 1)x + 4m - 5 = 0$ soit vérifiée pour $x = 0$; pour $x = 1$ ou pour $x = -1$.

2° Transformer l'expression : $A = (3x - 6)(x^2 - 1) - (5x - 10)(x + 1)^2$ en un produit de facteurs du premier degré. Quelles valeurs faut-il attribuer à x pour que A prenne la valeur 0? *(B.E.P.C.)*

407. 1° On considère l'expression : $\dfrac{4 - x^2}{(2 - x)^2} + \dfrac{(2 + x)^2}{4 - x^2}.$

Démontrer que pour toute valeur de x différente des nombres $+ 2$ et $- 2$, cette expression est égale à la fraction $y = \dfrac{2(2 + x)}{2 - x}.$

2° Déterminer, si elles existent, les valeurs de x pour lesquelles la fraction y prend l'une ou l'autre des trois valeurs numériques suivantes : $y = 3$; $y = 0$; $y = -2$. *(B.E.P.C.)*

408. Soit l'expression $y = (x^2 - 9)^2 - (x + 3)^2$.

1° La développer et l'ordonner suivant les puissances décroissantes de x.

2° La décomposer en un produit de facteurs.

3° Calculer sa valeur numérique pour $x = 0$; $x = -3$; $x = 2$.

4° Indiquer les valeurs de x pour lesquelles $y = 0$. *(B.E.P.C.)*

409. On donne l'équation, dont x est l'inconnue.

$$5(m-1)x^2-(2m-7)x-3(m-2)=0.$$

1° Résoudre cette équation quand $m=1$.

2° Pour quelles valeurs de m a-t-on x égal à -1, à 1?

3° On pose $a=5(m-1)$, $b=-(2m-7)$, $c=-3(m-2)$.
Calculer la quantité b^2-4ac et démontrer qu'elle est un carré parfait.

4° Que devient l'équation initiale en x quand on remplace m par la valeur $\frac{13}{8}$? Démontrer qu'elle prend la forme d'un produit remarquable. La résoudre.

(B.E.P.C.)

410. Soit le polynôme en x : $P=(m+1)x^2+(3m-2)x+2m+1$.
On désigne par a le coefficient de x^2, par b le coefficient de x, par c le terme qui ne contient pas x.

1° Calculer en fonction de m l'expression b^2-4ac. Développer et réduire cette expression. Pour quelles valeurs de m est-elle nulle?

2° Montrer que pour chacune des valeurs de m ainsi trouvées le polynôme P est le carré d'un binôme du premier degré en x.

3° Pour ces mêmes valeurs de m, résoudre l'équation $P=0$. *(B.E.P.C.)*

411. 1° Après avoir simplifié les fractions rationnelles suivantes :

$$A=\frac{4x^2-9}{4x^2+12x+9},\qquad B=\frac{6x-2x^2}{4x^2+6x},$$

calculer l'expression $z=A+B$.

2° Pour quelles valeurs de x l'expression z est-elle nulle? Est-elle égale à 1?

3° Calculer la valeur de z pour $x=\sqrt{3}-1$ et rendre rationnel le dénominateur.

(B.E.P.C.)

412. Soit la fraction : $\frac{A}{B}=\frac{4x^2-1}{4x^2+2x}$.

1° Peut-on calculer sa valeur numérique pour toute valeur de x? Justifier la réponse.

2° Simplifier cette fraction.

3° Pour quelle valeur de x, la fraction $\frac{A}{B}$ est-elle égale à 0? *(B.E.P.C.)*

413. 1° Calculer les produits $(5x-3)(x+1)$ et $(2x-1)(x+1)$. Exprimer les résultats sous la forme de polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x.

2° En utilisant les calculs précédents, montrer l'identité des deux expressions :

$$y_1=(5x^2+2x-3)^2-(2x^2+x-1)^2,$$
$$y_2=(x+1)^2[(5x-3)^2-(2x-1)^2]$$

et écrire chacune d'elles sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré. Pour quelles valeurs de x a-t-on $y_1=y_2=0$?

3° Calculer y_1 (ou y_2) pour $x=0$, pour $x=-1$, pour $x=\sqrt{2}-1$.

4° Simplifier la fraction :

$$F=\frac{(5x^2+2x-3)^2-(2x^2+x-1)^2}{(7x-4)^2(3x-2)^2}.$$

Indiquer pour quelles valeurs de x cette simplification n'est pas légitime et chercher pour quelle valeur de x la fraction F est égale à $\frac{1}{21}$. *(B.E.P.C.)*

414. 1° Simplifier l'expression : $y = \dfrac{\dfrac{(7x+2)(2x+3)}{x+1}}{\dfrac{5x}{1-x^2} + \dfrac{2}{1-x}}$.

2° Calculer y pour $x = \sqrt{3}$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $y = 0$?

3° Pour quelles valeurs de x a-t-on :

a) $y = 3 - x^2$; *b*) $y = 4x^2 - 9$? *(B.E.P.C.)*

415. On considère l'expression : $E = (x^2 - 4)^2 - 4(x+2)^2$.

1° La développer et ordonner le résultat suivant les puissances décroissantes de x. (On désignera par E_1 la forme de E ainsi obtenue.)

2° La décomposer en un produit de facteurs du premier degré, dont certains pourront être identiques. (On désignera par E_2 la forme de E ainsi obtenue.)

3° Calculer la valeur numérique de E pour $x = 2$ et pour $x = 2\sqrt{3}$, puis déterminer les valeurs de x pour lesquelles $E = 0$.

4° Simplifier l'expression : $y = \dfrac{E}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ *(B.E.P.C.)*

416. 1° On donne l'expression :

$$E = \left(\frac{5x^2}{2} - x + 5\right)^2 - \left(\frac{3x^2}{2} + 5x - 4\right)^2;$$

montrer que E peut être mise sous la forme du produit des carrés de deux facteurs du premier degré.

2° Peut-on choisir x de manière que E soit : *a*) négative; *b*) nulle? Justifier les réponses.

3° Effectuer $(2x+1)(x-3)$. Élever au carré le polynôme obtenu. Les résultats seront présentés sous la forme de polynômes réduits et ordonnés.

4° Simplifier la fraction : $F = \dfrac{4x^4 - 20x^3 + 13x^2 + 30x + 9}{(4x^2 - 1)^2}$.

Calculer x lorsque $F = 1$. *(B.E.P.C.)*

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

110. Équation à deux inconnues. — Considérons l'équation du premier degré à deux inconnues :

$$3x + 4y = 5.$$

Elle admet pour *solutions* (nº 98) : $\begin{cases} x = -1, & y = +2 \\ x = +1, & y = \frac{1}{2} \\ x = +3, & y = -1, \text{ etc...} \end{cases}$

Une équation à plusieurs inconnues admet, en général, une infinité de solutions.

L'équation : $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 0$ n'a qu'une solution : $x = 3$; $y = 5$ et l'équation : $x^2 + y^2 = -1$ est impossible.

111. Système de deux équations à deux inconnues. — Considérons les deux équations du 1er degré à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 5y = -12. \end{cases}$$

Leur association forme un système de deux équations à deux inconnues. Résoudre ce système, c'est trouver les solutions communes aux deux équations qui le composent.

A cet effet, on forme à partir du système donné une équation contenant *une seule inconnue;* il faut donc faire disparaître ou *éliminer* l'autre. Nous utiliserons pour cela deux méthodes.

ÉLIMINATION PAR SUBSTITUTION

112. Exemple. — *Considérons le système :*

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 & (1) \\ 2x - 5y = -12. & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) calculons y :

$$y = \frac{5 - 3x}{4}.$$

Remplaçons y par la valeur ainsi trouvée dans l'équation (2); nous obtenons :

$$2x - 5\left(\frac{5 - 3x}{4}\right) = -12.$$

L'équation (4) contient la seule inconnue x. Résolvons-la; pour cela multiplions ses deux membres par 4 :

$$8x - 5(5 - 3x) = -48$$

ou $$8x - 25 + 15x = -48$$

ou $$23x = -23.$$

Donc : $$x = -1.$$

Portons $x = -1$ dans l'équation (3); nous avons :

$$y = \frac{5 + 3}{4} = 2.$$

Le système proposé admet, comme il est facile de le vérifier, la solution $x = -1$; $y = 2$.

113. Règle. — ***La méthode de substitution consiste donc à calculer l'une des inconnues dans l'une des équations puis, dans l'autre équation, à substituer à cette inconnue la valeur ainsi trouvée.***

On réussit ainsi à éliminer une inconnue. D'autre part, on voit d'après cet exemple que :

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admet en général une solution unique.

ÉLIMINATION PAR ADDITION

114. 1er Exemple. — *Soit le système :*

$$\begin{cases} 4x + 3y = 13 & (1) \\ 5x - 3y = -31. & (2) \end{cases}$$

Les coefficients de y sont opposés. Additionnons membre à membre (n° 100); il vient : $9x + 0y = -18 \implies 9x = -18.$

L'inconnue y se trouve ainsi éliminée et nous obtenons : $x = -2$.

En portant cette valeur dans (1), nous obtenons :

$$-8 + 3y = 13 \implies y = 7.$$

Le système proposé admet la solution $x = -2$; $y = 7$.

115. 2e Exemple.
$$\begin{cases} 9x + 2y = 17 & \quad \vert +5 & (1) \\ 6x + 5y = -7 & \quad \vert -2. & (2) \end{cases}$$

Les coefficients de y sont $+2$ et $+5$. Afin de les rendre opposés, multiplions les membres de l'équation (1) par $+5$ et ceux de l'équation (2) par -2 (n° 101), puis additionnons membre à membre (n° 100) :

$$\begin{array}{r} 45x + 10y = 85 \\ -12x - 10y = 14 \\ \hline 33x \qquad = 99 \end{array} \implies x = 3.$$

Portons $x = 3$ dans l'équation (1) : $27 + 2y = 17 \implies y = -5$.

Il est facile de vérifier que le système admet pour solution : $x = 3$; $y = -5$.

Remarquons que la valeur de y peut aussi se calculer en éliminant x entre les équations (1) et (2). Les coefficients de x étant 9 et 6, les multiplicateurs 6 et -9 peuvent être simplifiés et ramenés à 2 et -3.

$$\begin{array}{r} 18x + 4y = 34 \\ -18x - 15y = 21 \\ \hline -11y = 55 \end{array} \implies y = -5.$$

116. Règle. — ***La méthode d'addition consiste à multiplier les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de telle sorte que les coefficients d'une des inconnues deviennent opposés.***

L'une des inconnues s'élimine alors par addition.

117. Remarque. — Lorsque les coefficients d'une des inconnues sont égaux, cette inconnue s'élimine immédiatement en retranchant membre à membre les deux équations (nº 100).

EXEMPLE :
$$\begin{cases} 7x + 5y = 19 \\ 3x + 5y = 31. \end{cases}$$

Retranchons membre à membre ces deux équations. Nous obtenons :

$$4x + 0y = -12 \implies x = -3.$$

La première équation $7x + 5y = 19$

donne alors : $-21 + 5y = 19.$ D'où : $y = 8.$

GÉNÉRALISATIONS

118. Systèmes à plusieurs inconnues. — Les procédés d'élimination précédents se généralisent immédiatement pour des systèmes à plus de deux inconnues :

EXEMPLE :
$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -2 & (1) \\ 4x - 5y + z = -11 & (2) \\ 3x + 22y - 3z = 32. & (3) \end{cases}$$

1º **Par substitution.** — Calculons z dans (2) et portons la valeur trouvée dans les équations (1) et (3) :

$$\begin{cases} z = -11 - 4x + 5y \\ 2x + 3y - 2(-11 - 4x + 5y) = -2 \\ 3x + 22y - 3(-11 - 4x + 5y) = 32. \end{cases}$$

Soit :
$$\begin{cases} z = -11 - 4x + 5y & (4) \\ 10x - 7y = -24 & (5) \\ 15x + 7y = -1. & (6) \end{cases}$$

Les équations (5) et (6) forment un système de deux équations à deux inconnues; par addition nous obtenons :

$$25x = -25 \implies x = -1.$$

L'équation (5) donne alors :

$$-10 - 7y = -24 \implies y = 2.$$

En portant $x = -1$ et $y = 2$ dans (4), nous obtenons :

$$z = -11 + 4 + 10 \implies z = 3.$$

2° **Par addition.** — Éliminons z entre les équations (1) et (2). En multipliant les 2 membres de (2) par $+2$ et en ajoutant membre à membre à (1), nous obtenons :

$$10x - 7y = -24. \qquad (5)$$

Éliminons z entre les équations (2) et (3). En multipliant les 2 membres de (2) par $+3$ et en ajoutant membre à membre à (3), nous obtenons :

$$15x + 7y = -1. \qquad (6)$$

Nous sommes conduits comme dans le cas précédent à résoudre le système formé par les équations (5) et (6).
On trouve $x = -1$; $y = 2$, et en portant dans (2) : $z = 3$.

119. Systèmes particuliers. — *Soit à résoudre :*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{5} & (1)\ (2) \\ 4x + 3y - z = 65. & (3) \end{cases}$$

Il s'agit de trouver trois nombres x, y et z proportionnels à 3, 2 et 5 et vérifiant l'équation (3). En désignant par t la valeur commune des rapports égaux $\frac{x}{3}, \frac{y}{2}$ et $\frac{z}{5}$ (n° 7) nous obtenons :

$$x = 3t; \qquad y = 2t \qquad \text{et} \qquad z = 5t \qquad (4)$$

Portons ces valeurs dans l'équation (3) :

$$12t + 6t - 5t = 65 \qquad \text{soit :} \qquad 13t = 65.$$

On a donc : $t = 5$ et les relations (4) donnent alors :

$$x = 15; \qquad y = 10 \qquad \text{et} \qquad z = 25.$$

120. Changement d'inconnues. — *Soit à résoudre le système :*

$$(\text{I}) \begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 18 \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{y} = 7. \end{cases}$$

Posons $\frac{1}{x} = \text{X}$ et $\frac{1}{y} = \text{Y}$. Nous obtenons le système :

$$(\text{II}) \begin{cases} 2\text{X} + 3\text{Y} = 18 \\ 5\text{X} - 2\text{Y} = 7 \end{cases} \qquad \text{qui admet la solution :} \qquad \begin{cases} \text{Y} = 3 \\ \text{Y} = 4. \end{cases}$$

On en déduit $\frac{1}{x} = 3$ et $\frac{1}{y} = 4$, donc : $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{4}$.

EXERCICES

— Résoudre les systèmes :

417. $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = 4 \\ 5x + 7y = 6. \end{array}\right.$

418. $\left\{\begin{array}{l} 7x + 11y = 76 \\ -x + 10y = 47. \end{array}\right.$

419. $\left\{\begin{array}{l} 9x - 17y = -1 \\ 17x + 9y = -43. \end{array}\right.$

420. $\left\{\begin{array}{l} 7x - 5y = 3 \\ 3x + 10y = 62. \end{array}\right.$

421. $\left\{\begin{array}{l} 3x + 35y = 206 \\ 8x + 105y = 631. \end{array}\right.$

422. $\left\{\begin{array}{l} 36x - 17y = 51 \\ 48x + 13y = -39. \end{array}\right.$

423. $\left\{\begin{array}{l} 3x - 28y = 31 \\ 5x + 42y = -37. \end{array}\right.$

424. $\left\{\begin{array}{l} 12x + 31y = -4 \\ 18x - y = 184. \end{array}\right.$

425. $\left\{\begin{array}{l} 77x + 14y = 98 \\ 66x + 19y = -21. \end{array}\right.$

426. $\left\{\begin{array}{l} 8x - 5y = 240 \\ 6x + y = 256. \end{array}\right.$

427. $\left\{\begin{array}{l} 35x + 6y = 330 \\ 4x + 3y = 3. \end{array}\right.$

428. $\left\{\begin{array}{l} 8x + 77y = -168 \\ x + 10y = -24. \end{array}\right.$

429. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{4} + \dfrac{3y}{2} = 1{,}9 \\ \dfrac{x}{2} + 4{,}5y = 15{,}5. \end{array}\right.$

430. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} - 0{,}75y = -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{12} + \dfrac{5y}{8} = 1. \end{array}\right.$

431. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3x}{11} + \dfrac{5y}{22} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{12x}{17} - \dfrac{19y}{51} = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

432. $\left\{\begin{array}{l} 3(4x - 7y) - 4(x - y) = -12 \\ 5(2x + 3y) - 3(4x - y) = 58. \end{array}\right.$

433. $\left\{\begin{array}{l} x + 1 = 3(y - 1) \\ x - 1 = 1{,}4(y + 1). \end{array}\right.$

434. $\left\{\begin{array}{l} 4(x + y - 1) + 2x - 5y = 2 \\ 3(x - y + 1) + 7x - y = 13. \end{array}\right.$

435. $\left\{\begin{array}{l} 7(2x - y) + 3(5x - 4y) = 63 \\ 3(x + 2y) + 5(2x + y) = 38. \end{array}\right.$

436. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{8x - 5y - 3}{7} + \dfrac{11y - 4x - 7}{5} = 12 \\ \dfrac{9x + 4y - 13}{5} - \dfrac{3(x - 2)}{4} = 15. \end{array}\right.$

437. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x + 2}{x} = \dfrac{y + 1}{y - 2} \\ \dfrac{5x + 1}{5x - 2} = \dfrac{y - 1}{y - 2}. \end{array}\right.$

438. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3x + 11}{2} - \dfrac{x - 4y}{7} = 81 \\ 5x - 2y = 77. \end{array}\right.$

439. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x + 3)^2 + (y - 1)^2}{x^2 + y^2} = 1. \\ 3x + 2y = 73 \end{array}\right.$

440. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x - 3}{3} + \dfrac{y - 5}{7} = x - y + 8 \\ \dfrac{x + 3}{3} + \dfrac{y + 5}{7} = 4. \end{array}\right.$

441. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x - 1)^2 - (x - 5)^2}{(y + 1)^2 - (y - 1)^2} = 1 \\ 2y - x = 45. \end{array}\right.$

442. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x + 1}{y - 4} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{y(y - 4)} \\ \dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{y - 3}{y - 1} = \dfrac{5}{(x - 1)(y - 1)}. \end{array}\right.$

443. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1 - 2x}{3y - 4} = \dfrac{4x + 2}{6(2 - y)} \\ \dfrac{x - 2}{x + 3} = \dfrac{y}{y - 3}. \end{array}\right.$

444. $\left\{\begin{array}{l} x + y - 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 12 \\ 8x - 4y + 3z = 19. \end{array}\right.$

445. $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ x - y + z = -35 \\ x + y - z = 65. \end{array}\right.$

446. $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ -x + y - 2z = 2 \\ 2x - y - z = 9. \end{array}\right.$

447. $\left\{\begin{array}{l} x + y = 38 \\ y + z = 50 \\ z + x = 54. \end{array}\right.$

448. $\begin{cases} 5x + 3z = 26 \\ 4x + y - 3z = -14 \\ 5x - 2y + 3z = 20. \end{cases}$

449. $\begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = -2 \\ y + z = 13. \end{cases}$

450. $\begin{cases} \dfrac{8x}{3} - \dfrac{3y}{2} - z = 0 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{y}{4} - \dfrac{z}{4} = 3 \\ \dfrac{4x}{3} - \dfrac{7y}{4} + \dfrac{z}{2} = 0. \end{cases}$

451. $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} - \dfrac{z}{3} = \dfrac{37}{4} \\ \dfrac{2x}{5} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{10} = \dfrac{7}{5} \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{y}{6} + z = \dfrac{19}{6}. \end{cases}$

— **Résoudre les systèmes suivants :**

452. $\begin{cases} \dfrac{x}{9} = \dfrac{y}{5} \\ 2x + 3y = 231. \end{cases}$

453. $\begin{cases} \dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{11} \\ 5x - 3y = 35. \end{cases}$

454. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{10} \\ 6x + 5y = 460. \end{cases}$

455. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{11} \\ 3x + y - 2z = 28. \end{cases}$

456. $\begin{cases} \dfrac{x}{8} = -\dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} \\ 3x + 4y + z = 33. \end{cases}$

457. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+1}{8} = \dfrac{z+5}{2} \\ x + 2y + 3z = 160. \end{cases}$

458. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{5y}{6} - \dfrac{7z}{10} = 11. \end{cases}$

459. $\begin{cases} \dfrac{12}{x} + \dfrac{7}{y} = 71 \\ \dfrac{18}{x} + \dfrac{13}{y} = 89. \end{cases}$

460. $\begin{cases} \dfrac{9}{x} + \dfrac{10}{y} = 75 \\ \dfrac{12}{x} + \dfrac{25}{y} = 135. \end{cases}$

461. $\begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 18 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{y} = -55. \end{cases}$

462. $\begin{cases} \dfrac{6}{5(x+4)} + \dfrac{2}{3(y+2)} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{3}{x+4} + \dfrac{5}{2(y+2)} = \dfrac{7}{12}. \end{cases}$

463. $\begin{cases} \dfrac{3}{4(x-2)} + \dfrac{7}{3(y-1)} = 41 \\ \dfrac{5}{2(x-2)} - \dfrac{3}{5(y-1)} = 11. \end{cases}$

464. 1° Résoudre le système $\begin{cases} 5x - 3y = -111 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$

2° En déduire la solution du système : $\begin{cases} \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y} = -11 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = 30. \end{cases}$

465. 1° Résoudre le système d'équations : $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 12 \\ 8x - 4y + 5z = 21. \end{cases}$

2° Transformer l'expression $A \equiv (3x - 6)(x^2 - 1) - (5x - 10)(x + 1)^2$ en un produit de facteurs du premier degré. Quelles valeurs faut-il attribuer à x pour que A prenne la valeur 0? *(B.E.P.C.)*

INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

121. Définitions. — ***On appelle inéquation une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs attribuées aux lettres qu'elle contient. Ces lettres sont les inconnues de l'inéquation.***

Ainsi l'inégalité : $4x - 5 > 7$ est une *inéquation à une inconnue.*

Les nombres $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$ qui vérifient cette inéquation sont des solutions de l'inéquation.

Les nombres $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$ ne la vérifient pas et ne sont pas solutions.

On appelle solution d'une inéquation à une inconnue toute valeur de cette inconnue pour laquelle l'inéquation devient une inégalité numérique.
Résoudre une inéquation, c'est en trouver les solutions.

Nous utiliserons à cet effet les propriétés des inégalités algébriques, qui s'appliquent aux inéquations :

122. Théorème I. — ***On peut ajouter ou retrancher une même expression aux deux membres d'une inéquation.***

Soit l'inéquation : $$5x + 12 > 4 - 3x. \quad (1)$$

Nous en déduisons, en ajoutant $3x - 12$ aux deux membres :

$$5x + 12 + 3x - 12 > 4 - 3x + 3x - 12.$$

Soit : $$5x + 3x > 4 - 12. \quad (2)$$

1° Application. — Dans l'exemple précédent, les termes $-3x$ et $+12$ de l'inéquation (1) sont devenus $+3x$ et -12 dans l'inéquation (2); de plus ils ont changé de membre. Donc :

Dans une inéquation, on peut faire passer un terme d'un membre à l'autre, à condition de changer le signe qui le précède.

2° DEGRÉ D'UNE INÉQUATION ENTIÈRE. — *Si les deux membres d'une inéquation sont des polynômes, on dit que l'inéquation est entière.*

En faisant passer tous les termes dans le premier membre, l'autre se réduit à zéro. Le degré, par rapport à l'ensemble de ses lettres inconnues, du polynôme ainsi obtenu dans le 1er membre est le degré de l'inéquation.

Ainsi : $5x - 3 > 0$ est du premier degré.
$3x^2 - 5x - 1 < 0$ est du second degré.
$x^3 - x > 0$ est du troisième degré.

123. Théorème II. — ***1° On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre positif en conservant le sens de cette inéquation.***

2° On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre négatif, à condition de changer le sens de cette inéquation.

EXEMPLES. — 1° De l'inéquation : $\frac{2x+5}{4} - \frac{x-3}{6} < \frac{x+1}{3}$ (1)

on déduit, en multipliant les deux membres par 12, l'inéquation suivante :

$$3(2x+5) - 2(x-3) < 4(x+1) \quad (2)$$

(1) et (2) sont de même sens (même signe $<$).

2° De l'inéquation : $\frac{3x+1}{-2} > x + 7$ (1)

on déduit, en multipliant les deux membres par -2, l'inéquation suivante :

$$3x + 1 < -2(x+7) \quad (2)$$

(1) et (2) sont de sens contraires ($>$ et $<$).

124. Applications. — ***1° On peut supprimer les dénominateurs d'une inéquation en multipliant ses termes par un multiple commun positif des dénominateurs.***

C'est en effet ce que montre le premier exemple précédent.

2° On peut simplifier une inéquation en divisant ses termes par un même nombre positif.

Soit $5x - 35 > 20.$

En divisant les deux membres par $+5$, nous obtenons : $x - 7 > 4$.

3° On peut changer les signes des deux membres d'une inéquation à condition d'en changer le sens.

Cela revient à multiplier les deux membres de l'inéquation par — 1.

Ainsi : $-3x < 21 \Longleftrightarrow$ à $3x > -21$.

De même :

On peut échanger les deux membres d'une inéquation à condition d'en changer le sens.

125. Résolution de l'inéquation du premier degré à une inconnue.

1er **Exemple.** — *Soit l'inéquation* :

$$5(2x-3)-4(5x-7) > 19-2(x+11). \qquad (1)$$

Réduisons chaque membre; nous obtenons :

$$10x-15-20x+28 > 19-2x-22$$

soit :

$$-10x+13 > -3-2x.$$

Faisons passer les termes qui contiennent x dans le premier membre, les termes indépendants de x dans le second (théorème I) :

$$-10x+2x > -3-13.$$

Soit : $-8x > -16$ ou (n° 124, 3°) : $8x < 16$.

Divisons les deux membres par 8 (théorème II) :

$$x < \frac{16}{8} \Longrightarrow x < 2.$$

On peut vérifier que tout nombre inférieur à 2 satisfait à l'inéquation (1).

2e **Exemple.** — *Soit* : $x - \frac{x+1}{3} > \frac{2x-11}{5}$. (2)

Multiplions les deux membres par 15 (théorème II) :

$$15x-5(x+1) > 3(2x-11)$$

soit : $10x-5 > 6x-33 \Longrightarrow 10x-6x > 5-33$.

Donc : $4x > -28 \Longrightarrow x > -7$.

On peut vérifier que tout nombre supérieur à — 7 satisfait à l'inéquation (2).

126. Règle. — En définitive la marche à suivre est la suivante :

1° Supprimer les dénominateurs.

2° Réduire les deux membres de l'inéquation obtenue.

3° Faire passer dans un membre les termes qui contiennent l'inconnue, et dans l'autre membre les termes connus.

4° Diviser les deux membres par le coefficient de l'inconnue, en changeant ou non le sens de l'inéquation, selon que le coefficient de x est négatif ou positif.

127. Interprétation graphique. — Soit un axe orienté $x'x$ (fig. 3). Les points dont les abscisses vérifient l'inéquation (1) du numéro précédent sont les points situés à gauche du point A d'abscisse 2, pour lesquels on a : $x < 2$.

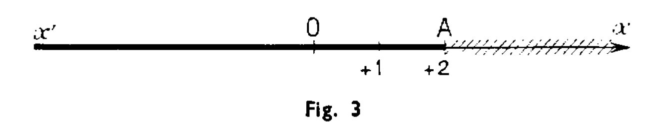


Fig. 3

On couvre de hachures la partie de l'axe située à droite du point A correspondant aux points dont l'abscisse ne vérifie pas l'inéquation.

EXERCICES

— Résoudre les inéquations suivantes :

466. $4(x + 4) - 7x + 10 > 8(5x + 4) + 166$.

467. $17 - 14x > 13 - 4x - 5(x - 4)$.

468. $5(x + 2) + 3{,}5 + (3x + 2) > 7x + 14 - 3(x + 1{,}5)$.

469. $7(4x - 5) - 4(x - 3) > 15(x + 2{,}75) + 7{,}3$.

470. $17(x + 5) + 15(x + 4) > -1 - 14(3x + 16)$.

— Résoudre les inéquations suivantes :

471. $x^2 + (x + 4)^2 > 2(x - 1)(x + 2) + 38$.

472. $5(x^2 + 2) + 2(3x - 5) > 5x^2$.

473. $(9x + 46)(x + 3) > (3x + 19)(3x + 10)$.

474. $7(1 - 2x) - 5(x + 1)(2x + 1) < (5x + 8)(1 - 2x)$.

475. $(3x - 22)^2 - (2x - 11)^2 + 6 > (2x + 15)(2x - 15) + x(x - 7)$.

476. $(x + 4)^3 + x^3 + (x + 3)^3 > 3x(x + 3)(x + 4)$.

— Résoudre les inéquations suivantes :

477. $\frac{7}{2}x + 3 - \frac{7x}{4} > \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}$.

478. $\frac{16}{21}x - \frac{2x}{15} + 3 > \frac{2x}{3} + \frac{13}{3}$.

479. $\frac{10x}{9} + \frac{1}{2} - \frac{x}{6} > \frac{31}{2} - \frac{3x}{9} + \frac{1}{3}$.

480. $\frac{9x}{4} > x - 2 - \frac{2x}{13} - \frac{115}{52}$.

481. $\frac{5x}{3} + 5{,}5 - \frac{2x}{5} > \frac{3x}{2} - \frac{x}{3} + 4.$

482. $\frac{x}{6} + \frac{x}{3} < \frac{x}{4}.$

483. $\frac{x+6}{4} - \frac{x-2}{6} > \frac{x+1}{3}.$

484. $\frac{3x-1}{-2} + \frac{x+3}{-3} < +16.$

485. $x - 1 - \frac{x}{3} > \frac{2x-1}{5}.$

486. $\frac{4-3x}{12} + \frac{3}{4} < 2(x-1) + \frac{5(3-2x)}{6}.$

487. $\frac{x+2}{5} - \frac{5x+9{,}2}{6} + \frac{1-x}{4} > 0.$

488. $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} < \frac{5x-6}{3} - \frac{7x-30}{4}.$

489. $\frac{2x-5}{5} + \frac{x+12}{2} > -4.$

490. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x-2}{6} < \frac{4x+7}{5} - 17.$

491. $\frac{5x-8}{-4} + \frac{7x-12}{9} > \frac{x+18}{-6}.$

492. $\frac{5x-4}{8} + \frac{x}{3} < \frac{4(2x-5)}{9}.$

493. $\frac{2x+3}{3} - \frac{5x+12}{7} > x + 15.$

494. $\frac{8x+26}{-5} + \frac{x-8}{7} < \frac{5x+12}{-2} + \frac{3x+8}{4}.$

495. $\frac{2x-9}{9} - \frac{x-6}{7} > \frac{x-11}{8}.$

496. $\frac{5x+2}{4} - \frac{3x+2}{8} < \frac{4x+5}{5} - \frac{x-10}{3}.$

497. $\frac{5x-4}{7} - \frac{3x-5}{4} > \frac{x+14}{5}.$

498. $\frac{4x-5}{5} - \frac{x-8}{6} < \frac{2x+8}{3} - \frac{2x-13}{9}.$

— **Résoudre les inéquations suivantes :**

499. $\frac{x(x+6)}{3} - \frac{(x+3)(x+6}{12} > \frac{x(x+3)}{4}.$

500. $\frac{(x+3)^2}{-3} - \frac{x(x-1)}{2} < \frac{(5x+9)(x-2)}{-6} - \frac{28}{3}.$

501. $\frac{(3x+4)(3x+2)}{9} - \frac{(x-4)(x+2)}{2} > \frac{(9x+8)(x+4)}{18} + \frac{8}{9}.$

502. $\frac{(4x-1)^2}{-4} + \frac{(5x-11)^2}{7} < \frac{(8x-19)(3x-2)-151}{-56}.$

503. $\left(x + \frac{7}{3}\right)(x + 5{,}75) > (x + 9{,}5)(x + 6{,}5) - \frac{145}{3}.$

504. $\frac{(x-8)^2}{5} + \frac{x^2}{3} > \frac{(3x-2)(3x-4)-(x+2)(x-2)}{15}.$

505. On considère le système d'équations : $\begin{cases} x + 2y - a = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$

où x et y désignant les inconnues et a un nombre relatif donné.

1° Résoudre ce système. Cas où $a = +5$.

2° Entre quelles limites doit être compris le nombre a pour que les solutions x et y trouvées soient toutes deux positives?

3° Est-il possible de trouver une valeur de a pour que x et y soient toutes deux négatives? *(B.E.P.C.)*

PROBLÈMES D'ALGÈBRE

128. Problème. — ***Quel nombre entier faut-il ajouter à chacun des deux termes de la fraction $\frac{3}{5}$, pour obtenir une fraction égale à $\frac{2}{3}$?***

Désignons par x le nombre *entier et positif* inconnu. Nous avons :

$$\frac{3+x}{5+x}=\frac{2}{3}$$

L'inconnue satisfait à cette équation.

Réciproquement, *toute racine entière et positive de cette équation est une solution*
Nous obtenons, en réduisant au dénominateur $3\,(5+x)$:

$$\frac{3\,(3+x)}{3\,(5+x)}=\frac{2\,(5+x)}{3\,(5+x)}.$$

Nous pouvons supprimer le dénominateur commun :

$$3\,(3+x)=2\,(5+x) \iff 9+3\,x=10+2\,x$$

ou $$3\,x-2\,x=10-9. \qquad \text{Donc :} \quad x=1.$$

Cette racine est la solution du problème.

VÉRIFICATION : $$\frac{3+1}{5+1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

129. Problème. — 21 ***livres sont empilés les uns sur les autres; la hauteur de la pile atteint*** 81 ***cm. Certains de ces livres ont une épaisseur de*** 5 ***cm; les autres une épaisseur de*** 3 ***cm. Trouver le nombre de livres de chaque sorte.***

Désignons par x le nombre des livres de 5 cm d'épaisseur, par y le nombre des livres de 3 cm d'épaisseur. Le nombre total des livres est 21. Donc :

$$x + y = 21. \qquad (1)$$

Les livres de 5 cm d'épaisseur ont, en centimètres, une épaisseur totale $5x$; les livres de 3 cm d'épaisseur ont, en centimètres, une épaisseur totale $3y$. La hauteur totale de la pile est 81 cm. Donc :

$$5x + 3y = 81. \qquad (2)$$

Les nombres x et y satisfont donc au système formé par les équations (1) et (2). Réciproquement, toute solution de ce système est une solution du problème pourvu que x et y soient tous deux entiers et positifs.

Résolvons ce système :

$$\begin{array}{rcrr} -3x - 3y & = & -63 & (1) \\ 5x + 3y & = & 81 & (2) \\ \hline 2x & = & 18 & \end{array}$$

soit : $x = 9$.

L'équation (1) donne alors : $9 + y = 21 \implies y = 12$.

Il y a donc 9 livres de 5 cm et 12 livres de 3 cm.

VÉRIFICATION : $\begin{cases} (5 \text{ cm} \times 9) + (3 \text{ cm} \times 12) = 81 \text{ cm.} \\ 12 + 9 = 21. \end{cases}$

130. Problème. — ***Les fortunes de trois personnes sont proportionnelles aux nombres*** 2, 3 ***et*** 5. ***En additionnant le triple de la première, le double de la seconde et la troisième, on trouve*** 5 100 ***francs. Quelles sont ces fortunes?***

Désignons par x la fortune de la 1re, par y celle de la 2e, par z celle de la 3e

Les indications de l'énoncé se traduisent par le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} & (1) \\ 3x + 2y + z = 5\,100. & (2) \end{cases}$$

Désignons par t la valeur commune des rapports (1), nous obtenons :

$$x = 2t; \qquad y = 3t; \qquad z = 5t.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (2), il vient :

$$6\,t + 6\,t + 5\,t = 5\,100.$$

Soit : $17t = 5\,100$ d'où $t = \frac{5\,100}{17} = 300.$

La première fortune est donc : 300 F × 2 = 600 F ; la seconde : 300 F × 3 = 900 F, et la troisième : 300 F × 5 = 1 500 F.

La vérification est immédiate.

131. Remarques générales. — Des exemples précédents il résulte que la solution algébrique d'un problème comporte :

1° ***Le choix de l'inconnue ou des inconnues.*** On doit choisir les inconnues de façon que leur détermination entraîne la solution du problème. Ne pas craindre d'introduire plusieurs inconnues ou même une inconnue auxiliaire si cela facilite la mise en équation et la résolution.

2° ***La mise en équation.*** Elle consiste à traduire l'énoncé par une ou plusieurs égalités entre les données et les inconnues. *Il faut autant d'équations que d'inconnues.* Rechercher également les conditions pour que toute solution de l'équation ou du système obtenu soit solution du problème.

3° ***La résolution de l'équation ou du système obtenu.*** C'est la partie purement algébrique du problème. On vérifie ensuite si la racine trouvée satisfait aux conditions imposées ci-dessus.

132. Interprétation d'une solution négative. — ***Un père a 43 ans. Son fils a 23 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de l'âge du fils?***

Soit x le nombre d'années demandé; l'âge du père devient $43 + x$, celui du fils devient $23 + x$. Il faut donc :

$$43 + x = 2\,(23 + x).$$

Réciproquement, toute racine *positive* de cette équation est une solution du problème. On obtient :

$$43 + x = 46 + 2\,x$$
$$43 - 46 = 2\,x - x$$

soit $$x = -3.$$

Le problème est impossible. Cependant on peut interpréter la réponse de la façon suivante. Ajouter (— 3) années à l'âge du père et à l'âge du fils, c'est leur retrancher 3 ans. La réponse $x = 3$ satisfait au problème si l'on convient d'en modifier ainsi l'énoncé : *Il y a combien d'années l'âge du père était-il double de l'âge du fils?*

133. Problème de géométrie. — ***Soit un triangle*** ABC ***dans lequel*** BC = 13 cm, AC = 15 cm, AB = 11 cm; ***par un point*** D ***du côté*** AB, ***on mène la parallèle à*** BC ***qui coupe*** AC ***en*** E. ***Déterminer*** D ***de façon que :*** DE = BD + CE.

Pour placer le point D il suffit de connaître la longueur BD. Posons BD = x (en centimètres), et calculons EC. D'après le théorème de Thalès (fig. 4).

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{CA} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{CE} = \frac{11}{15}$$

d'où :

$$CE = \frac{15x}{11}$$

Fig. 4.

Calculons DE, en utilisant la similitude des triangles ADE et ABC. Nous avons :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{DE}{13} = \frac{11 - x}{11}$$

d'où :

$$DE = \frac{13(11 - x)}{11}.$$

L'égalité imposée par l'énoncé se traduit par l'équation suivante :

$$\frac{13(11 - x)}{11} = x + \frac{15x}{11}. \qquad (1)$$

Réciproquement, toute racine de cette équation est une solution du problème si le point correspondant D se place entre B et A, c'est-à-dire si l'on a :

$$0 < x < 11.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par 11 :

$$13(11 - x) = 11x + 15x.$$

Soit : $13(11 - x) = 26x$ ou $11 - x = 2x$.

Donc : $11 = 3x$ et $x = \frac{11}{3} = 3{,}66...$

Cette racine conduit à la solution du problème car $0 < \frac{11}{3} < 11$. On pourra rechercher une solution géométrique et montrer que le point I du segment DE tel que BD = DI est le centre du cercle inscrit au triangle.

EXERCICES

506. Trouver 3 nombres entiers consécutifs dont la somme vaut 129.

507. Trouver un nombre dont la somme des quotients par 5, par 7 et par 11 soit égale à 334.

508. On ajoute un même nombre x aux deux termes de la fraction $\frac{5}{7}$. La fraction obtenue vaut $\frac{9}{10}$. Trouver le nombre x.

509. On ajoute x au numérateur de la fraction $\frac{15}{17}$ et on retranche x à son dénominateur. La fraction obtenue vaut $\frac{5}{3}$. Trouver le nombre x.

510. Lorsqu'un nombre augmente de 15 son carré augmente de 795. Trouver ce nombre.

511. On ajoute x aux deux termes de $\frac{5}{7}$ et on retranche x aux deux termes de $\frac{7}{8}$. Les deux fractions obtenues sont égales. Trouver le nombre x.

512. Trouver deux nombres connaissant leur somme 240 et sachant qu'en divisant le premier par le second on trouve 9 comme quotient et 10 comme reste.

513. Une somme valant 34,50 F est composée de 30 pièces, les unes de 2 F, les autres de 0,50 F. Trouver le nombre de pièces de chaque sorte.

514. En vendant le vin de sa récolte 100 F l'hectolitre un vigneron peut acheter une propriété et il lui reste 800 F. S'il vendait son vin 88 F l'hectolitre, il lui resterait seulement 80 F après l'achat de la propriété. Trouver le prix de celle-ci et le nombre d'hectolitres de vin récoltés.

515. Un objet qu'on a payé 500 F est mis en loterie. En vendant le billet de loterie 12 F, on gagne autant que ce qu'on perdrait en le vendant 8 F. Quel est le nombre des billets de loterie?

516. Trois ouvriers ont travaillé respectivement 21, 23 et 28 jours dans un mois. Ils ont touché un salaire total de 1 440 F. Combien chacun d'eux a-t-il reçu?

517. Trois personnes se partagent un héritage. La part de la seconde est les 5/6 de celle de la première plus 360 F. La part de la troisième est les 2/3 de celle de la première moins 1 500 F. Sachant que la seconde a reçu 14 100 F de plus que la troisième on demande la part de chaque personne et le montant total de l'héritage.

518. Une salle de cinéma comprend des places d'orchestre à 1,50 F, des places de corbeille à 3 F et des places de balcon à 2,40 F. Le nombre des places de balcon est la demi-somme du nombre des places d'orchestre et de corbeille. Lorsque toutes les places sont occupées la recette pour les places de corbeille est égale à la moitié de la recette totale. Sachant qu'il y a 900 places en tout, on demande le nombre de places de chaque sorte.

519. Un libraire a vendu 84 livres, les uns à 4,50 F, les autres à 3,60 F pour une somme totale de 310,50 F. Combien a-t-il vendu de livres de chaque sorte?

520. On possède une somme de 102 F en pièces de 0,50 F, 1 F et 2 F. Il y a 84 pièces en tout et le nombre total des pièces de 2 F et de 1 F surpasse de 4 le triple du nombre des pièces de 0,50 F. Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte?

521. Un bateau assure, sur un fleuve, le service entre une localité A et une localité B située à 31,5 km en aval de A. La vitesse horaire du courant est de 2,5 km et elle s'ajoute ou se retranche à la vitesse horaire du bateau suivant que ce dernier descend ou remonte le courant. La durée du trajet de A à B est les 7/9 de celle du retour :

1° Trouver la vitesse horaire propre du bateau.

2° Calculer, en minutes, le retard dû au courant sur un aller et retour.

522. Un cycliste se rend de A à B par une route mesurant 35 km. La route qu'il emprunte au retour est plus longue de 7 km et sa vitesse horaire moyenne au retour est inférieure de 6 km à sa vitesse horaire moyenne à l'aller. Sachant que le temps mis au retour est le 3/2 du temps mis à l'aller :

1° Calculer les vitesses horaires moyennes réalisées à l'aller et au retour.

2° Le cycliste est parti à 8 h 20 m de A et il s'est arrêté 2 h 30 m en B, calculer l'heure de son retour en A.

523. Un cultivateur a vendu 2 880 F sa récolte de blé et 2 016 F sa récolte d'avoine. Sachant que le prix du quintal de blé est les 4/3 de celui du quintal d'avoine et que le poids du blé surpasse de 12 quintaux celui de l'avoine, trouver les quantités vendues de chaque céréale, puis le prix du quintal de chacune d'elles.

524. Un commerçant vend en trois fois un lot d'articles identiques. Il en vend d'abord la moitié pour 972 F en faisant un bénéfice de 2,80 F par unité, puis une seconde partie pour 594 F en faisant un bénéfice de 3 F par unité et le reste pour 378 F avec un bénéfice de 2,50 F par unité. Trouver le prix d'achat d'un article, puis le nombre d'articles vendus à chaque fois et le bénéfice total réalisé.

525. Les côtés d'un triangle ABC sont BC = 16 cm, AB = 6 cm et AC = 15 cm. Calculer la longueur de chacun des segments déterminés sur BC.

1° Par la bissectrice intérieure de l'angle BAC.

2° Par la bissectrice extérieure du même angle.

526. Un trapèze ABCD a pour bases AB = 12 cm et CD = 22 cm. Le côté AD mesure 15 cm. Par un point M de AD on mène la parallèle MN aux bases. Quelle valeur faut-il donner à AM pour que MN soit égal à 18 cm?

527. Soit un carré ABCD dont le côté est égal à 12 cm. On prend un point M sur AB et on trace le cercle de centre M passant par A. Quelle valeur faut-il donner à AM pour que ce cercle soit tangent au cercle de diamètre BC?

528. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 20 cm. On prend un point M sur ce demi-cercle et on mène la perpendiculaire MH à AB. Quelle valeur faut-il donner à AH pour que AH soit le double de MH?

529. Un automobiliste entreprend un voyage de 390 km. Parti à 8 h il roule en plaine à la vitesse de 80 km-heure jusqu'au moment où la route présente une pente régulière le contraignant à rouler à 60 km-heure. L'automobiliste arrive à 13 h. Trouver les distances parcourues en plaine et en montée. A quelle heure se fait le changement de vitesse? *(B. E. P. C.)*

530. 1° Démontrer l'identité : $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$.

2° Un rectangle a pour surface 420 m² et sa longueur x surpasse sa largeur y de 23 m. Calculer le demi-périmètre p du rectangle. Calculer les dimensions du rectangle. *(B. E. P. C.)*

531. On considère un rectangle dont le périmètre en mètres est $2p$. Ses dimensions en mètres sont x et y. Si on augmente x de 5 m et y de 3 m la surface augmente de 195 m².

1° Calculer les deux côtés x et y en fonction de p.

2° Pour quelles valeurs de p le problème est-il possible?

3° Pour quelle valeur de p le rectangle est-il un carré?

4° Calculer x et y dans le cas où $p = 50$. *(B. E. P. C.)*

532. Les dimensions d'un rectangle sont telles que si l'on augmente la longueur de 2 cm et qu'on diminue la largeur de 1 cm la surface de ce rectangle ne change pas. On désigne par x, y et $2p$ les mesures en centimètres de la longueur, de la largeur et du périmètre de ce rectangle.

1° Si $2p = 20$, calculer x et y.

2° Calculer x et y en fonction de p dans le cas général. Trouver la condition que doit remplir p pour que le problème soit possible.

3° Peut-on choisir p pour que $x = 2y$? *(B. E. P. C.)*

533. L'unité de longueur étant le centimètre, on considère sur un axe $x'x$ orienté positivement de x' vers x les points fixes A, B, C, D tels que $\overline{AB} = 3$; $\overline{AC} = 2$; $\overline{AD} = 6$ et le point M tel que $\overline{AM} = x$.

1° Calculer en fonction de x les nombres relatifs $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$ ainsi que les expressions :

$$y = \overline{MA}.\overline{MB} - \overline{MC}.\overline{MD} \qquad Y = \overline{MA}.\overline{MD} - \overline{MB}.\overline{MC}.$$

2° Calculer les valeurs de x pour lesquelles on a ou bien $y = Y$, ou bien $y = -Y$.

3° Représenter sur l'axe $x'x$, les positions M et M' correspondant aux valeurs trouvées. *(B. E. P. C.)*

534. On considère sur un axe $x'x$ où O est l'origine des abscisses, trois points A, B, C d'abscisses respectives $+2$, $+6$, -3.

1° Déterminer l'abscisse x_1 de M milieu du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2° Quelle est l'abscisse x_2 d'un point P tel que $\overline{PA} + \overline{PB} = 4\,\overline{PC}$?

3° Quelle est l'abscisse x_3 d'un point Q tel que $\overline{QA} + \overline{QB} = k\,\overline{QC}$, égalité dans laquelle k est un nombre relatif quelconque? Discuter le résultat.

4° Pour quelles valeurs de k le point Q se confond-il avec O? avec M?

(B. E. P. C.)

FONCTIONS ET GRAPHES

134. Notion de fonction. — Supposons que nous ayons un jour d'hiver relevé aux différentes heures les températures suivantes :

6 h. : — 2°	10 h. : 0°	14 h. : + 7°	18 h. : + 3°
7 h. : — 2°,5	11 h. : + 1°,5	15 h. : + 6°,5	19 h. : + 2°,5
8 h. : — 3°	12 h. : + 4°	16 h. : + 5°,5	20 h. : + 2°
9 h. : — 2°	13 h. : + 6°	17 h. : + 4°	21 h. : + 1°.

Nous voyons d'après ce tableau qu'à chaque heure correspond une température déterminée. Cette température dépend de l'heure de l'observation. Nous exprimerons cela en disant que :

La température varie avec l'heure de l'observation ou *que la température est fonction de l'heure de l'observation.*

Autres exemples. — La longueur d'une tige métallique dépend de sa température et à chaque température correspond une longueur déterminée : *La longueur de cette tige est donc fonction de sa température.*

De même, *la longueur d'une corde* d'un cercle est fonction de la mesure de *l'arc sous-tendu.*

Le prix d'un coupon d'étoffe est fonction de *la longueur de ce coupon*, etc.

135. Définition. — ***Un nombre y est fonction d'un nombre variable x quand à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de y.***

Les variables x et y peuvent être les mesures de deux grandeurs ou des nombres abstraits. Lorsque y est la valeur numérique d'une expression algébrique de la variable x, on dit que *y est fonction algébrique de x*. Ainsi :

$$y = 2x + 3, \qquad y = \frac{1}{x+2}, \qquad y = \frac{x^2}{2} - 3x.$$

D'une façon générale lorsque la variable y est fonction de la variable indépendante x, on écrit : $y = f(x)$ (lire « f de x »).

136. Intervalle de variation. — 1° La fonction $y = 2x^2 - 3x$ peut se calculer quelle que soit la valeur numérique donnée à x : *Elle est définie pour toutes les valeurs de x.*

2° La fonction $y = \sqrt{9 - x^2}$ ne peut se calculer que pour les valeurs de x telles que $9 - x^2 \geqslant 0$ ou $x^2 \leqslant 9$. Soit $|x| \leqslant 3$ ou $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Cette fonction n'est définie que pour les valeurs de x comprises entre -3 et $+3$, c'est-à-dire *pour les valeurs de x de l'intervalle* $[-3, +3]$.

VALEURS INFINIES. — Lorsqu'on donne à une variable x des valeurs successives de plus en plus grandes en valeur absolue et finalement supérieures à tout nombre fixé à l'avance, *on dit que l'on fait tendre x vers l'infini* (∞). On écrit, suivant que x reste positif ou négatif :

$$x \rightarrow +\infty \qquad \text{ou} \qquad x \rightarrow -\infty$$

(lire « x tend vers $\pm$ l'infini »).

Ainsi le nombre $x = 10^n$ tend vers $+\infty$, lorque l'on donne à l'entier n des valeurs de plus en plus grandes.

La fonction $y = \sqrt{2 - x}$ est définie pour $2 - x \geqslant 0$ ou $x \leqslant +2$. On dit qu'elle est définie sur l'intervalle $]-\infty, +2]$.

137. Sens de variation d'une fonction. — 1° La longueur d'une tige métallique augmente lorsque sa température augmente et par suite diminue si la température diminue. On dit que : *la longueur de cette tige est fonction croissante de sa température.*

2° La longueur d'une corde d'un cercle diminue lorsque sa distance au centre augmente et inversement. On dit que : *la longueur de la corde est fonction décroissante de sa distance au centre.*

Une fonction est croissante quand elle varie dans le même sens que la variable. Elle est décroissante quand elle varie en sens contraire de la variable.

Si, dans un intervalle donné où la fonction $y = f(x)$ est définie, l'inégalité : $x_1 < x_2$ pour deux valeurs quelconques de x entraîne :

1° $y_1 < y_2$; la fonction $y = f(x)$ est croissante sur cet intervalle.

2° $y_2 > y_1$; la fonction $y = f(x)$ est décroissante sur cet intervalle.

Étudier la variation d'une fonction, c'est rechercher les intervalles où la fonction est définie et déterminer dans chacun de ces intervalles si la fonction est croissante ou décroissante.

138. Coordonnées des points d'un plan. — Considérons dans un plan deux axes rectangulaires $x'x$ et $y'y$ se coupant au point O (fig. 5). Par un point M du plan menons les parallèles aux deux axes de façon à former le rectangle OAMB. La position du point M est déterminée par celles des points A et B et par suite par les mesures algébriques :

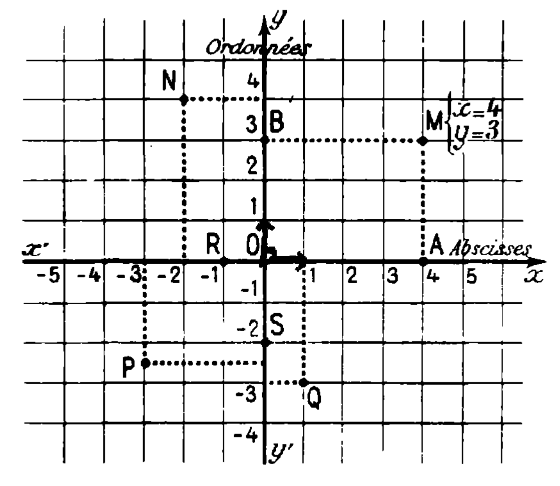


Fig. 5

$\overline{OA} = x$ et $\overline{OB} = y$.

x est ***l'abscisse*** du point M.

y est ***l'ordonnée*** du point M.

L'ensemble des deux nombres x et y constitue les ***coordonnées*** du point M. Les deux axes $x'x$ et $y'y$ sont des axes de coordonnées et constituent le repère cartésien xOy.

Sur la figure $x = +4$, $y = +3$. Le point M est le point représentatif du couple de nombres : $(+4$ et $+3)$.

Inversement, la construction du point M connaissant ses coordonnées x et y s'obtient en prenant A sur $x'x$ et B sur $y'y$ tels que $\overline{OA} = x$ et $\overline{OB} = y$ et en achevant le rectangle AOBM.

On peut ainsi construire les points : N $\begin{cases} x = -2 \\ y = +4. \end{cases}$ P $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2{,}5. \end{cases}$

Q $\begin{cases} x = +1 \\ y = -3. \end{cases}$ R $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0. \end{cases}$ S $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \end{cases}$

139. Distance de deux points A (x_1, y_1) **et** B (x_2, y_2). — Désignons par A′ et B′ les projections de A et B sur Ox et par A″ et B″ leurs projections sur Oy (fig. 6). Soit H l'intersection de AA″ et BB′. D'après le théorème de Pythagore :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A''B''}^2.$$

Or la mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité moins l'abscisse de son origine. Donc.

$$\overline{A'B'} = x_2 - x_1 \quad \text{et} \quad \overline{A''B''} = y_2 - y_1.$$

Soit $\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

En particulier la distance de l'origine O (0, 0) au point M (x, y) est telle que :

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2.$$

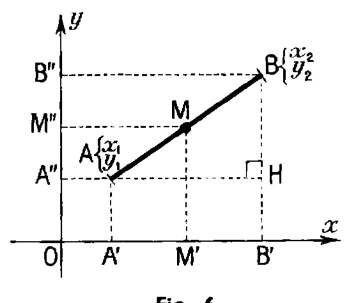


Fig. 6.

140. Milieu d'un segment.

Soit M (x, y) le milieu du segment AB (fig. 6). Ses projections M' et M'' sur les axes sont les milieux respectifs de

A'B' et A''B''. D'où : $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$.

Soit : $\overline{OM'} - \overline{OA'} = \overline{OB'} - \overline{OM'}$

$x - x_1 = x_2 - x \implies 2x = x_1 + x_2$

Donc : $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. On trouverait de même : $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

L'abscisse (ou l'ordonnée) du milieu d'un segment est égale à la demi-somme des abscisses (ou des ordonnées) de ses extrémités.

EXEMPLE — *On considère les points* A (+ 4; + 1) *et* B (+ 8; + 4). *Calculer la longueur* AB, *les coordonnées du milieu* M *de* AB *et la longueur* OM.

On a : $\overline{AB}^2 = (8 - 4)^2 + (4 - 1)^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Donc : AB = 5.

Le milieu M de AB a pour coordonnées :

$$x = \frac{1}{2}(8 + 4) = +6 \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2}(1 + 4) = 2{,}5.$$

Donc : $OM^2 = 6^2 + (2{,}5)^2 = 42{,}25$ et $OM = 6{,}5$.

141. Graphe d'une température. — Reprenons le tableau des températures du n° 134.

Sur du papier quadrillé (fig. 7), traçons deux axes de coordonnées et représentons la première observation (6 h, — 2°) par le point ($x = 6, y = -2$), puis la seconde (7 h, — 2°,5) par le point ($x = 7, y = -2{,}5$) et ainsi de suite.

Les différents points ainsi obtenus semblent être disposés suivant une courbe qui serait plus apparente si nous avions fait des observations plus fréquentes, tous les quarts d'heure par exemple. Cette courbe, que nous pouvons tracer d'une façon approchée, constitue la ***représentation graphique ou graphe de la variation de la température*** de 6 h à 21 h.

Ce graphe s'interprète plus facilement que le tableau de valeurs qui a servi à le construire : de 6 h à 8 h la température a baissé de — 2° à — 3°; de 8 h à 14 h elle a monté de — 3° à + 7° et de 14 h à 21 h elle est redescendue de + 7° à + 1°. Il est clair que la température de + 4° a été atteinte à 12 h et à 17 h et qu'à 15 h 30 m la température était environ + 6°.

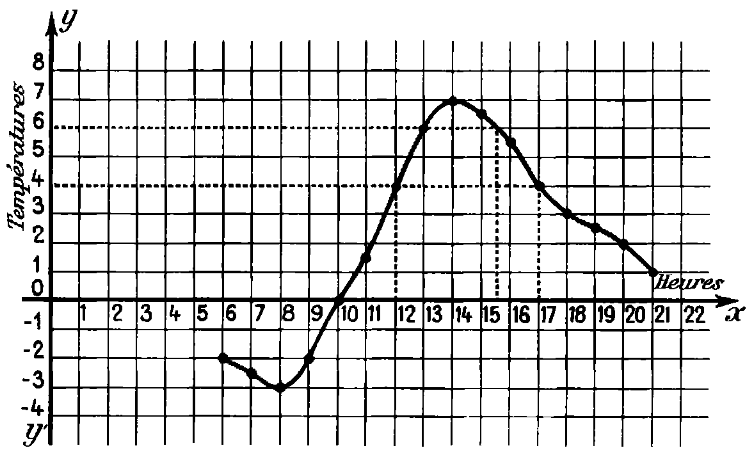


Fig. 7.

142. Représentation graphique d'une fonction. — Toutes les fonctions sont, en général, susceptibles d'une représentation graphique analogue.

EXEMPLE. — *Représenter graphiquement* $y = 2x - \frac{x^2}{4}$ *quand* x *varie de* 0 à 10.

Donnons à x différentes valeurs numériques et calculons les valeurs correspondantes de y : Nous obtenons :

x	0	2	4	6	8	10
y	0	3	4	3	0	— 5

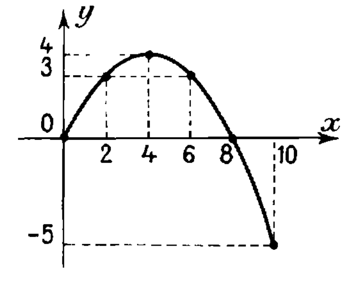


Fig. 8.

Construisons les points ($x = 0, y = 0$), ($x = 2, y = 3$), etc., et joignons tous ces points par une courbe continue. Nous obtenons le graphe de la fonction : $y = 2x - \frac{x^2}{4}$. Cette fonction est visiblement croissante pour $0 < x < 4$, décroissante pour $4 < x < 10$.

Remarque. — Lorsque x et y sont les mesures de deux grandeurs de natures différentes, il n'est pas nécessaire d'adopter des unités égales pour la graduation des deux axes Ox et Oy. Par contre dans les calculs de distances (n° 139), il faut obligatoirement prendre la même unité sur les deux axes.

EXERCICES

535. On considère les points A (+ 18; + 6) et B (+ 3; + 14). Calculer la distance AB, les coordonnées du milieu M de AB et la distance OM.

— Reprendre le même problème pour les couples de points :

536. $\begin{cases} A\,(+\,12\,;\,+\,2) \\ B\,(0\,;\,+\,7) \end{cases}$ **537.** $\begin{cases} A\,(-\,3\,;\,+\,2) \\ B\,(+\,12\,;\,+\,10) \end{cases}$ **538.** $\begin{cases} A\,(-\,6\,;\,+\,6) \\ B\,(+\,9\,;\,-\,2). \end{cases}$

539. Un rectangle ABCD a un périmètre constant et égal à 12 cm. Calculer son aire y lorsque le côté AB mesure x cm. Construire la courbe représentant la variation de y lorsque x prend toutes les valeurs de 0 à 6 cm.

540. Un rectangle ABCD a une aire constante et égale à 6 cm². Le côté AB mesure x cm. Calculer la mesure y du côté BC. Représenter graphiquement la variation de y lorsque x prend toutes les valeurs comprises entre 1 cm et 6 cm.

541. Un trapèze ABCD a une aire de 6 cm². La base AB mesure 1 cm et la base CD mesure x cm. Calculer la hauteur y du trapèze. Représenter graphiquement les variations de y lorsque x varie de 0 à 11 cm.

542. Mesurer dans un cercle de 10 cm de diamètre les cordes sous-tendant les arcs de 0°, 30°, 60°, 90°, 120°... 270°, 360°. Construire le graphe des variations de la longueur y de la corde sous-tendant un arc de x degrés.

— Construire le graphe des variations des expressions suivantes :

543. $y = 4x - x^2$ lorsque x varie de — 2 à + 6.

544. $y = x^2 - 4x + 3$ lorsque x varie de — 2 à + 5.

545. $y = \dfrac{6x + 6}{x + 3}$ lorsque x varie de — 2 à + 9.

546. $y = \dfrac{x^3}{4} - 3x^2 + 9x$ lorsque x varie de 0 à + 8.

547. $y = \sqrt{21 + 4x - x^2}$ lorsque x varie de — 3 à + 7.

548. Par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy (unité : 1 cm), placer les quatre points :

A $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1{,}5 \end{cases}$ B $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$ C $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2{,}5 \end{cases}$ D $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5{,}5 \end{cases}$

1° Calculer les longueurs des côtés et des diagonales du quadrilatère ABCD. Nature de ce quadrilatère.

2° Vérifier que AC et BD ont même milieu I et trouver les coordonnées de ce point.

3° A quelles conditions le point M (x, y) se trouve-t-il sur le cercle de centre I passant par A ou sur le cercle de centre I passant par O?

549. 1° Étant donnés deux axes de coordonnées rectangulaires (l'unité est le cm) $x'Ox$ et $y'Oy$, on construit sur $x'Ox$ les points M et P d'abscisses $\overline{OM} = +2$, $\overline{OP} = -3/2$. Calculer $\overline{MP}$ et $\overline{OR}$, R étant le point symétrique de M par rapport à P.

2° On construit le point A de coordonnées (2; 2), le point B de coordonnées (— 3; 4) et le point D de coordonnées (— 3 /2, — 3 /2). Utiliser la première question pour trouver les coordonnées du point C symétrique de A par rapport à D. Nature du triangle OBR? *(B.E.P.C)*

ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = ax$

143. Grandeurs proportionnelles. — Rappelons que (nº 6) :

Pour que deux grandeurs soient proportionnelles il faut et il suffit qu'il y ait un rapport constant entre toute mesure de la première et la mesure correspondante de l'autre.

Si nous désignons par a la valeur du rapport constant entre la mesure y de la deuxième grandeur qui correspond à la mesure x de la première, nous obtenons :

$$\frac{y}{x} = a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = ax}$$

La relation $y = ax$ est la relation caractéristique entre deux variables directement proportionnelles x et y.

EXEMPLES. — 1º $y = 3x$. Quel que soit x on peut calculer y. On obtient ainsi pour des valeurs de x allant en croissant

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	8	10
$y = 3x$	-15	-9	-6	-3	0	3	6	9	15	24	30

Nous constatons que les valeurs de y vont en croissant pour $a = +3 > 0$.

2º $y = -2x$. Nous pouvons de même calculer y pour toute valeur de x.

x	-7	-4	-2	-1	0	1	2	3	5	9	12
$y = -2x$	$+14$	$+8$	$+4$	$+2$	0	-2	-4	-6	-10	-18	-24

Nous constatons que les valeurs de y vont en décroissant pour $a = -2 < 0$. Ces résultats se généralisent :

144. Théorème. — ***La fonction $y = ax$ est définie pour toutes les valeurs de x. Elle est croissante quand a est positif. Elle est décroissante quand a est négatif.***

On peut en effet, quel que soit x, calculer le produit ax et déterminer la valeur correspondante de y. Soient x_1 et x_2 deux valeurs quelconques de x, $y_1 = ax_1$ et $y_2 = ax_2$ les valeurs correspondantes de y. L'inégalité : $x_1 < x_2$ entraîne :

$$ax_1 < ax_2 \quad \text{donc} \quad y_1 < y_2 \quad \text{si } a \text{ est positif (n° 123)}$$
$$ax_1 > ax_2 \quad \text{donc} \quad y_1 > y_2 \quad \text{si } a \text{ est négatif.}$$

Il en résulte que y est une fonction croissante si a est positif (n° 137), décroissante si a est négatif.

VALEURS PARTICULIÈRES. — 1° Pour $x = 0$ on obtient toujours $y = 0$. Notons que y et x sont de même signe si a est positif, de signes différents si a est négatif.

2° Si x tend vers l'infini, il en est de même de y. Si on veut par exemple obtenir $y = 5x$ supérieur à 1 000 000, il suffit de prendre $x > 200\,000$.

145. Tableau de variation. — On résume les résultats précédents sous la forme d'un tableau :

a positif

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

a négatif

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

146. Problème. — *Représenter graphiquement la distance parcourue par un piéton qui marche à la vitesse de 4 km à l'heure.*

La distance y parcourue en x heures est égale à 4 km $\times$ x. Soit : $y = 4x$.

Donnons à x différentes valeurs et calculons les valeurs correspondantes de y :

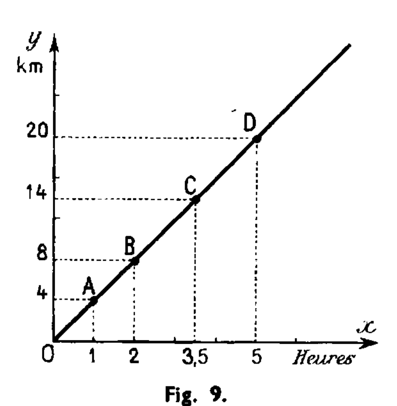


Fig. 9.

$x = 0$ h   1 h   2 h   3,5 h   5 h
$y = 0$ km   4 km   8 km   14 km   20 km.

Construisons deux axes de coordonnées Ox et Oy et graduons Ox en heures et Oy en kilomètres (fig. 9). Puis déterminons les points :

$$A \begin{cases} x = 1 \\ y = 4. \end{cases} \qquad B \begin{cases} x = 2 \\ y = 8. \end{cases}$$

$$C \begin{cases} x = 3{,}5 \\ y = 14. \end{cases} \qquad D \begin{cases} x = 5 \\ y = 20. \end{cases}$$

Il est visible que tous ces points sont situés sur la droite OD. Cette droite représente le graphique de la fonction $y = 4x$. Montrons que cette conclusion est générale.

147. Théorème. — *Le graphe de la fonction $y = ax$ est une droite passant par l'origine des coordonnées.*

Construisons le point A de coordonnées $\begin{cases} \overline{OB} = 1 \\ \overline{OC} = a \end{cases}$ et traçons la droite OA (fig. 10).

1° *Soit un point* M *quelconque de la droite* OA. *Montrons que ses coordonnées* $x = \overline{OP}$ *et* $y = \overline{OQ}$ *vérifient la relation :* $y = ax$.

D'après le théorème de Thalès (Géométrie n° 7) les parallèles AB et MP déterminent des segments proportionnels sur Ox et OA, d'où :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}.$$

Soit : $$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}.$$

On démonterait de même que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OQ}} \quad \text{et par suite que :}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OQ}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x} = \frac{a}{y}.$$

Soit en faisant le produit des extrêmes et des moyens :

$$y = ax$$

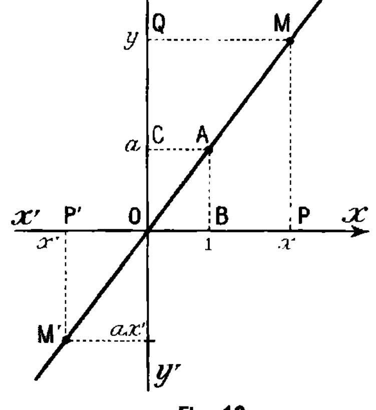


Fig. 10.

(La démonstration est valable si le point M a des coordonnées de signes contraires à celles de A.)

2° *Montrons que réciproquement tout point d'abscisse* x' *et d'ordonnée* $y' = ax'$ *se trouve sur la droite* OA.

Construisons le point P' de $x'x$ tel que $\overline{OP'} = x'$ et par P' menons la parallèle à $y'y$ qui coupe la droite OA en M'. D'après ce qui précède le point M' ayant pour abscisse x', a pour ordonnée ax'. C'est donc le point de coordonnées $(x', y' = ax')$ et il se trouve sur OA.

Il en résulte que les points de la droite OA constituent l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation : $y = ax$.

148. Coefficient directeur de la droite $y = ax$. — La droite $y = ax$ est définie par le point O et le point A ($x = 1, y = a$). Donnons au coefficient a différentes valeurs : $\frac{1}{2}$, 1, 2, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ et construisons les droites correspondantes (fig. 11). Nous pouvons faire les remarques suivantes :

1° *Si a est positif, y est une fonction croissante de x* et la droite $y = ax$ traverse les angles xOy et $x'Oy'$.

Si *a est négatif, y est une fonction décroissante de x* et la droite correspondante traverse les angles $x'Oy$ et xOy'.

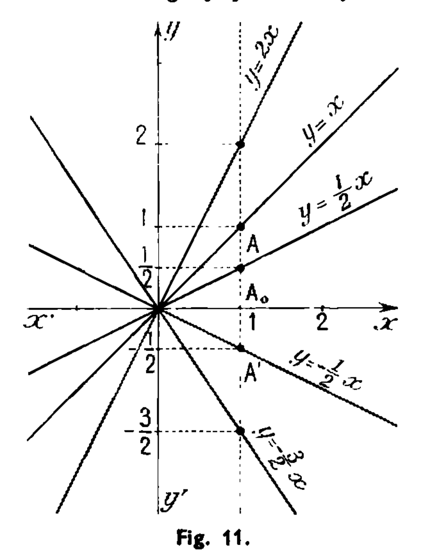


Fig. 11.

2° *Les droites relatives à deux valeurs opposées de a sont symétriques par rapport à x'x.*

Il en est ainsi pour les droites $y = \frac{1}{2}x$ et $y = -\frac{1}{2}x$ car les points A et A' qui les définissent sont symétriques par rapport à $x'x$.

3° *Lorsque la valeur absolue de a augmente, l'angle xOA augmente.*

Le point A s'éloigne en effet de la demi-droite Ox.

Si $a = 0$ le point A est en A_0 sur Ox. La droite $y = 0.x$ est donc confondue avec Ox.

4° Si on a adopté la même unité sur les deux axes : $\operatorname{tg}\widehat{xOA} = \frac{A_0A}{OA_0} = \frac{|a|}{1}$ (Géométrie n° 50). Donc $\operatorname{tg}\widehat{xOA} = |a|$:

Le nombre $|a|$ est la tangente trigonométrique de l'angle xOA.

Nous voyons en définitive que la position de la droite $y = ax$ est fonction de la valeur relative du coefficient a. Ce coefficient est appelé pour cette raison le *coefficient directeur ou pente de la droite $y = ax$.*

En particulier les droites $y = x$ et $y = -x$ sont les bissectrices des angles xOy et xOy'. On les appelle première et seconde bissectrices des angles formés par les axes.

EXERCICES

— Représenter graphiquement les fonctions :

550. 1° $y = 2x$; 2° $y = \frac{3}{2}x$; 3° $y = \frac{5}{4}x$.

551. 1° $y = -3x$; 2° $y = -\frac{x}{2}$; 3° $y = -\frac{3}{4}x$.

552. Représenter sur un même graphique les fonctions $y = x$ et $y = -x$. Que représentent les droites obtenues pour les angles xOy et xOy'?

553. Représenter graphiquement les fonctions : $y = \frac{1}{3}x$ et $y = 3x$.

On prend sur la première droite le point A, d'abscisse $\overline{OP} = 3$ et sur la deuxième le point B d'ordonnée $\overline{OQ} = 3$. Comparer les triangles OPA et OBQ et en déduire que les deux droites sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle xOy.

554. Représenter graphiquement : $y = 2x$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

On prend sur la première droite le point M d'abscisse $\overline{OA} = 1$ et sur la seconde le point N d'abscisse $\overline{OB} = 2$. Comparer les triangles OAM et NBO et montrer que les deux droites sont perpendiculaires.

555. Même exercice que le précédent avec les droites : $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{4}{3}x$.

556. Quelle est l'équation de la droite passant par l'origine et le point A de coordonnées : ($x = 4$, $y = 6$)?

557. Même exercice que le précédent avec le point A ($x = 4{,}5$, $y = -3$)?

558. Représenter graphiquement le prix d'une longueur d'étoffe sachant que 5 m de cette étoffe coûtent 40 F. Déterminer graphiquement :
1° Le prix de 3,20 m d'étoffe;
2° La longueur d'étoffe obtenue pour 26 F.

559. Représenter graphiquement la distance parcourue par un cycliste qui a effectué 36 km en 1 h 20 m. Déterminer graphiquement :
1° La distance parcourue en 2 h 20 m.
2° Le temps mis pour parcourir 45 km.

560. Représenter sur un même graphique les distances parcourues par un motocycliste et un cycliste partis en même temps sur la même route sachant que le premier a parcouru 80 km en 1 h 20 m et le second 35 km en 1 h 10. Déterminer graphiquement :
1° L'avance en km du motocycliste au bout de 2 h 30 m.
2° L'intervalle de temps séparant les passages au kilomètre 65.

561. Soient les axes de coordonnées Ox et Oy. On considère sur Ox le point A d'abscisse $+4$ et sur Oy le point B d'ordonnée $+3$ et un point M de coordonnées x et y.

1° Établir la relation qui doit exister entre x et y pour que l'on ait MA = MB. Dans ces conditions, M décrit une droite (D), que l'on construira.

2° La droite D rencontre la droite $y = x$ au point P. Calculer les coordonnées de P et calculer la longueur du segment IP, I étant le milieu de AB.

3° Le point M a pour projection sur Ox le point m; l'abscisse x de ce point, qui est aussi celle de M, varie avec le temps; si t est exprimé en secondes on a $x = 3{,}5 + t$. Où se trouve le point M quand $t = 0$? Calculer au temps t la longueur parcourue par le point M sur la droite (D). Au bout de combien de temps a-t-on PM = 5 cm?

(B.E.P.C.)

ÉTUDE DE LA FONCTION : $y = ax + b$

149. Théorème. — ***La fonction $y = ax + b$ est définie pour toute valeur de x. Elle est croissante lorsque a est positif et décroissante lorsque a est négatif.***

En effet a et b étant deux nombres donnés et x un nombre quelconque, on peut toujours calculer le produit ax puis ajouter le nombre b. Autrement dit la fonction $y = ax + b$ est définie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

D'autre part l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne :

$$ax_1 < ax_2 \quad \text{et} \quad ax_1 + b < ax_2 + b \quad \text{soit} \quad y_1 < y_2 \quad \text{pour } a \text{ positif.}$$
$$ax_1 > ax_2 \quad \text{et} \quad ax_1 + b > ax_2 + b \quad \text{soit} \quad y_1 > y_2 \quad \text{pour } a \text{ négatif.}$$

Pour $x = 0$, on obtient $y = b$ et lorsque x devient infini, il en est de même de ax et par suite de $ax + b = y$:

a positif

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	b	↗	$+\infty$

a négatif

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	b	↘	$-\infty$

150. Problème. — *Un train parti de Paris se dirige vers Bordeaux à la vitesse de 75 km à l'heure. A minuit il a parcouru 125 km. Calculer et représenter graphiquement la distance parcourue à une heure quelconque.*

Minuit représente 0 heure. Désignons par x l'heure actuelle. De minuit à x h le train a parcouru 75 km $\times\, x$. La distance totale y parcourue par le train est donc, en kilomètres : $y = 75\,x + 125$.

Cette relation s'applique aux distances parcourues avant minuit à condition de considérer : $x = -1$ pour 23 h, $x = -2$ pour 22 h, etc...

Traçons deux axes de coordonnées : Ox gradué en heures, Oy en kilomètres et supposons tracée la droite OA représentant $y = 75\,x$.

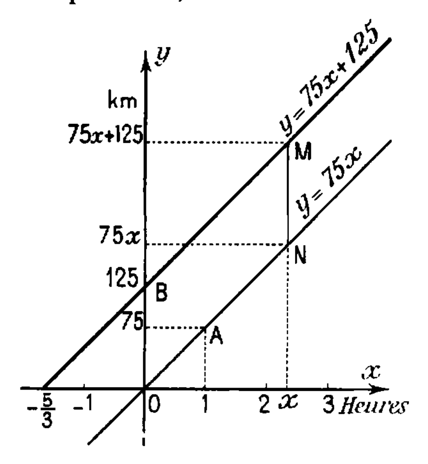


Fig. 12.

Considérons le point M de coordonnées x et $y = 75\,x + 125$. Soit N le point de OA ayant même abscisse x et d'ordonnée $y = 75\,x$. Le segment NM est égal à la différence des ordonnées et, quel que soit x, représente 125 km à l'échelle des ordonnées. Ce segment NM est donc toujours égal et parallèle au segment OB $= 125$ de l'axe Oy.

Le quadrilatère OBMN est donc un parallélogramme et lorsque x varie le point M décrit la droite menée par B et parallèle à OA.

Cette droite doit être limitée au point d'ordonnée $y = 0$, correspondant au départ du train de Paris. Son abscisse vérifie la relation $75\,x + 125 = 0$, soit $x = -\frac{5}{3}$. Le train est parti de Paris à : 24 h $- \frac{5}{3}$ h $=$ 22 h $\frac{1}{3}$ ou 22 h 20 m.

151. Représentation graphique de la fonction : $y = ax + b$.

Les résultats obtenus pour la fonction $y = 75\,x + 125$ se généralisent pour

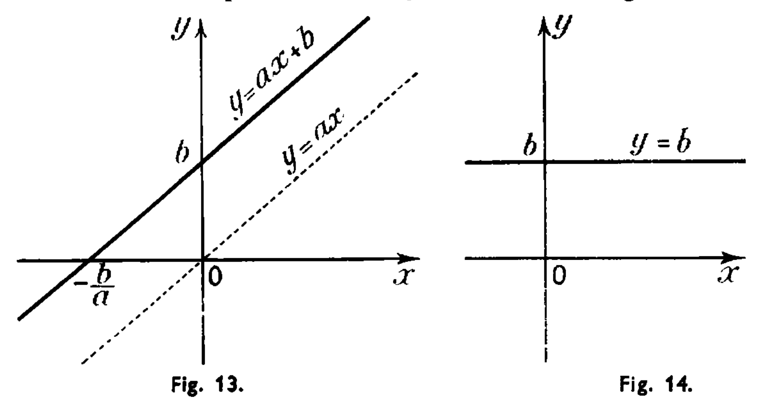


Fig. 13. Fig. 14.

toute fonction de la forme : $y = ax + b$ (a et b nombres connus), c'est-à-dire pour toute fonction qui s'exprime par un *binôme du 1er degré en x*.

La fonction du premier degré $y = ax + b$ est représentée graphiquement par une droite parallèle à la droite $y = ax$ et coupant l'axe Oy au point d'ordonnée b.

C'est pourquoi la fonction $y = ax + b$ est aussi appelée *fonction linéaire*. Notons que la relation $y = ax + b$ s'appelle l'*équation de la droite*.

Le coefficient a détermine la pente de la droite et s'appelle le *coefficient directeur*. Le nombre b est l'*ordonnée à l'origine*.

Le point d'intersection de la droite $y = ax + b$ avec l'axe Ox a pour ordonnée $y = 0$. Son abscisse vérifie la relation $ax + b = 0$ et est égale à $x = -\frac{b}{a}$.

152. Construction de la droite : $y = ax + b$.

Il suffit de construire deux points de cette droite. Si a est différent de 0, on peut toujours choisir les intersections avec les axes (fig. 13) :

$$(x = 0, y = b) \qquad \text{et} \qquad \left(x = -\frac{b}{a}, y = 0\right).$$

Si $a = 0$, la droite $y = b$ est parallèle à Ox (fig. 14).

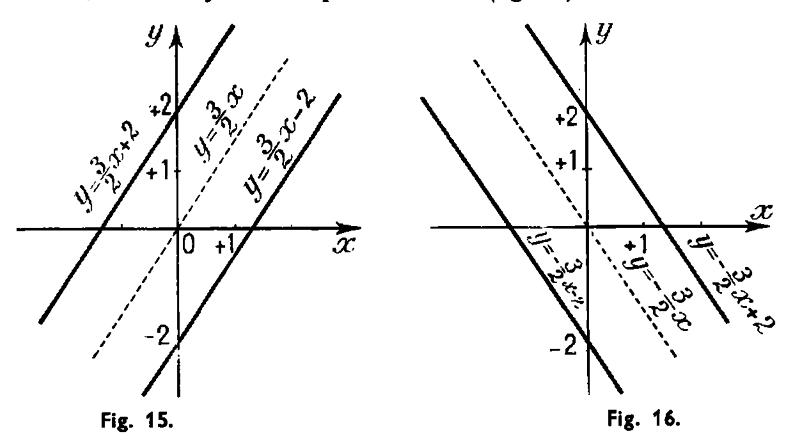


Fig. 15. Fig. 16.

Les figures 15 et 16 montrent différents exemples suivant que a est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que y est fonction croissante ou décroissante de x.

153. Droites parallèles ou perpendiculaires.

1° ***Pour que deux droites soient parallèles il faut et il suffit qu'elles aient même coefficient directeur.***

Deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ seront parallèles si elles sont parallèles à la même droite $y = ax$. D'où la condition : $\boxed{a = a'}$

EXEMPLES :

$y = 2x + 3$ et $y = 2x - 7$; $y = -x + 5$ et $y = -x - 3$.

2° ***Pour que deux droites soient perpendiculaires il faut et il suffit que leurs coefficients directeurs aient pour produit*** — 1.

Les deux droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ seront perpendiculaires s'il en est de même de leurs parallèles $y = ax$ et $y = a'x$.

Ces parallèles issues de O (fig. 17) sont définies par les points A (1, a) et A' (1, a'). La condition : $\overline{OA}^2 + \overline{OA'}^2 = \overline{AA'}^2$ est nécessaire et suffisante pour que le triangle OAA' soit rectangle en O (en supposant que l'unité de longueur est la même sur les deux axes).

Donc (n° 139) : $(1 + a^2) + (1 + a'^2) = (a' - a)^2$.

Soit après réduction : $\boxed{aa' = -1.}$

EXEMPLE : $y = -\frac{3}{2}x$ et $y = \frac{2}{3}x$.

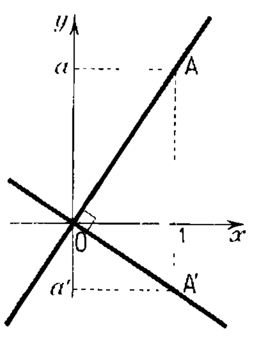


Fig. 17.

154. Applications. — 1° *Déterminer l'équation de la droite définie par les deux points* A ($x = 1$; $y = 2$) *et* B ($x = 3$; $y = 1$) (fig. 18).

L'équation est de la forme $y = ax + b$. Écrivons que les coordonnées de A, puis celles de B, vérifient cette équation. Nous obtenons :

$$\begin{matrix} \text{Pour A} : 2 = a \times 1 + b \\ \text{Pour B} : 1 = a \times 3 + b \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 2 & (1) \\ 3a + b = 1. & (2) \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) permettent de calculer a et b. On obtient aisément :

$a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$. L'équation de AB est donc : $\boxed{y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}}$.

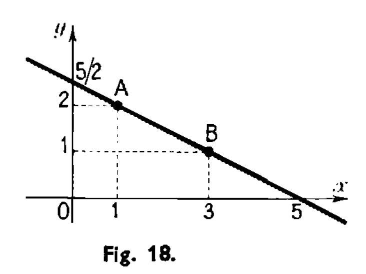


Fig. 18.

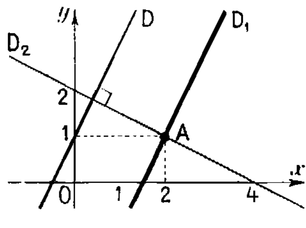


Fig. 19.

2° *Déterminer l'équation de la parallèle et l'équation de la perpendiculaire menées du point* A ($x = 2$; $y = 1$) *à la droite* (D) : $y = 2x + 1$ (fig. 19).

La parallèle D_1 à D a une équation de la forme : $y = 2x + b$ (n° 153). En écrivant qu'elle passe par A (2; 1), on obtient : $1 = 4 + b$, donc $b = -3$. L'équation de la droite D_1 est donc :

$$\boxed{y = 2x - 3}.$$

La perpendiculaire D_2 à D a une équation de la forme : $y = -\frac{1}{2}x + b'$ (n° 153). En écrivant qu'elle passe par A, on obtient $1 = -1 + b'$, donc $b' = 2$. D'où l'équation de la perpendiculaire D_2 : $\boxed{y = -\frac{x}{2} + 2}$.

EXERCICES

— **Représenter graphiquement les fonctions suivantes :**

562. $y = x + 4$. **563.** $y = -x + 3$. **564.** $y = 2x + 3$.

565. $y = 3x - 4$. **566.** $y = \frac{x}{2} + 3$. **567.** $y = -\frac{x}{2} + 2$.

568. $y = -\frac{3}{2}x + 5$. **569.** $y = 2x - 5$. **570.** $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

— **Construire sur un même graphique les droites suivantes et trouver leur particularité géométrique :**

571. $y = 2x + 3$ et $y = -2x + 3$. **572.** $y = -2x + 7$ et $y = -2x + 3$.

573. $y = \frac{x}{2} - 1$ et $y = -\frac{x}{2} + 1$. **574.** $y = \frac{x}{2} + 1$ et $y = 2x - 2$.

575. $y = 2x + 3$ et $y = -\frac{x}{2} + 3$. **576.** $y = \frac{x}{2} - 2$ et $y = -2x + 8$.

— **Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite AB définie par les points :**

577. $\begin{cases} A\,(x = -1\,;\, y = 1) \\ B\,(x = +2\,;\, y = 7). \end{cases}$ **578.** $\begin{cases} A\,(x = -2\,;\, y = 4) \\ B\,(x = 4\,;\, y = 1). \end{cases}$ **579.** $\begin{cases} A\,(x = 0\,;\, y = 5) \\ B\,(x = -3\,;\, y = -1). \end{cases}$

580. $\begin{cases} A\,(x = -1\,;\, y = -2) \\ B\,(x = +7\,;\, y = +2) \end{cases}$ **581.** $\begin{cases} A\,(x = 1\,;\, y = 0) \\ B\,(x = -3\,;\, y = 6), \end{cases}$ **582.** $\begin{cases} A\,(x = -1\,;\, y = -4) \\ B\,(x = +4\,;\, y = +6). \end{cases}$

583. **Former l'équation de la parallèle et celle de la perpendiculaire à la droite D d'équation $y = 3x - 2$ issues du point A $(x = -2;\ y = +4)$.**

— **Reprendre l'exercice précédent pour :**

584. $\begin{cases} D\,(y = -2x + 3) \\ A\,(x = +5\,;\, y = +3). \end{cases}$ **585.** $\begin{cases} D\left(y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) \\ A\,(x = +3\,;\, y = +5). \end{cases}$ **586.** $\begin{cases} D\,(y = 3x + 4) \\ A\,(x = 4\,;\, y = 2). \end{cases}$

587. **On considère les trois points A $(x = 0,\ y = 6)$; B $(x = -3,\ y = 0)$ et C $(x = 6;\ y = 0)$.**

1° Former les équations des côtés du triangle ABC, puis celle des hauteurs du triangle.

2° Soit H l'orthocentre du triangle. Vérifier l'égalité : $\overline{BO}.\overline{OC} = \overline{OA}.\overline{OH}$.

588. **On considère les trois points A $(x = -3;\ y = -3)$; B $(x = -1,\ y = +5)$ et C $(x = 7,\ y = 1)$.**

1° Équations des côtés du triangle ABC.

2° Coordonnées des milieux M, N et P des côtés BC, CA et AB, et équations des médianes AM, BN et CP.

3° Vérifier que le point G $(x = +1,\ y = +1)$ appartient à ces trois médianes.

589. **Un rectangle a pour dimensions 5 cm et 8 cm. On augmente chaque dimension d'une même longueur x cm. Étudier la variation du périmètre de ce rectangle lorsque le nombre positif x varie.**

590. Les côtés d'un triangle sont, en centimètres BC = 20; AC = 18; AB = 15. Par un point M de AB, entre A et B on mène la parallèle à BC qui coupe AC en N. Étudier la variation du périmètre du trapèze BMNC en fonction de BM = x.

591. Deux côtés d'un triangle mesurent 10 cm et 12 cm. Entre quelles valeurs est compris le troisième côté de mesure x? Étudier la variation du périmètre du triangle en fonction de x.

592. Un vase pèse vide 200 grammes. Calculer son poids total y lorsqu'il contient x cm³ de lait de densité 1,03. Étudier la variation de y en fonction de x.

593. Un vase contenant 1 litre d'eau pèse 1150 grammes. Calculer le poids y de ce vase (en grammes) lorsqu'on enlève x cm³ d'eau. Étudier la variation de y en fonction de x.

594. Une somme de 1 000 F est placée à 5 %. Étudier la variation du capital y obtenu après x années à intérêts simples.

595. Une personne possède un capital de 1 500 F. Elle en place une partie x en francs à 4 % et le reste à 5 %. Étudier le revenu annuel y en fonction de x.

596. 1° Représenter graphiquement la fonction $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (on prendra sur chaque axe le centimètre pour unité).

2° La droite représentative de cette fonction passe-t-elle par les points P ($x = 3$; $y = 2$) et M ($x = 4$; $y = 6$)?

3° On trace la circonférence de diamètre OP. Déterminer les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes. *(B.E.P.C.)*

597. 1° La prise en charge pour une course en taxi étant 0,30 F, le tarif kilométrique 0,20 F et le pourboire 10 % du montant indiqué par le compteur, écrire la relation qui existe entre le prix y de la course (en francs) et la distance x en km.

a) sans tenir compte du pourboire;

b) en tenant compte du pourboire.

2° Représenter graphiquement les deux fonctions (2 cm représenteront 1 km sur l'axe des x et 0,20 F sur l'axe des y). Ces deux courbes coupent respectivement l'axe des y en A et B. Quelle est la valeur de AB, d'après le graphique et par le calcul? *(B.E.P.C.)*

598. Le périmètre d'un rectangle est $2p$ (en cm). Si on augmente sa longueur x de 7 cm et sa largeur y de 2 cm, sa surface augmente de 224 cm².

1° Calculer x et y en fonction de p. Entre quelles valeurs faut-il choisir p pour que le problème soit possible?

2° Représenter sur le même graphique les variations de x et y lorsque p varie dans les limites trouvées précédemment (échelle 1 /10). On portera les valeurs de p en abscisses; celles de x et y en ordonnées.

3° Pour quelle valeur de p le rectangle est-il un carré? Interprétation graphique. *(B.E.P.C.)*

599. Un triangle ABC rectangle en A est tel que AB = 6 cm et AC = 8 cm. Par un point M de AC tel que AM = x on mène la perpendiculaire à AC qui coupe BC en P. De P on mène la perpendiculaire à AB qui coupe AB en N.

1° Calculer PM en fonction de x.

2° Déterminer x pour que AMPN soit un carré.

3° Représenter graphiquement, en fonction de x, la variation du périmètre du rectangle AMPN lorsque M se déplace entre A et C. *(B.E.P.C.)*

APPLICATIONS DE LA FONCTION : $y = ax + b$

155. Représentation graphique de l'équation : $ax + by = c$.

Soit à chercher les points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation :

$$2x + 3y = 12. \qquad (1)$$

Fig. 20.

Cette équation s'écrit :

$$y = -\frac{2}{3}x + 4. \qquad (2)$$

Les points cherchés sont ceux de la droite : $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (fig. 20).

Pour construire cette droite il suffit d'en déterminer deux points. On obtient par exemple les points :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 6. \end{cases}$$

Il est souvent commode de choisir les intersections avec les axes :

Avec Ox : $y = 0 \Longrightarrow 2x = 12$ d'où $x = 6$.
Avec Oy : $x = 0 \Longrightarrow 3y = 12$ d'où $y = 4$.

156. Théorème. — *L'équation $ax + by = c$ est représentée graphiquement par une droite.*

1° *Si a et b sont différents de* 0, l'équation peut s'écrire :

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Elle représente une droite de coefficient directeur $-\frac{a}{b}$ qui rencontre les axes aux points : A $\begin{cases} x = \frac{c}{a} \\ y = 0 \end{cases}$ et B $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$ (fig. 21).

2° Si $a = 0$, l'équation s'écrit : $by = c$ ou $y = \frac{c}{b}\cdot$

La droite est la parallèle à Ox, d'ordonnée égale à $\frac{c}{b}$ (fig. 22).

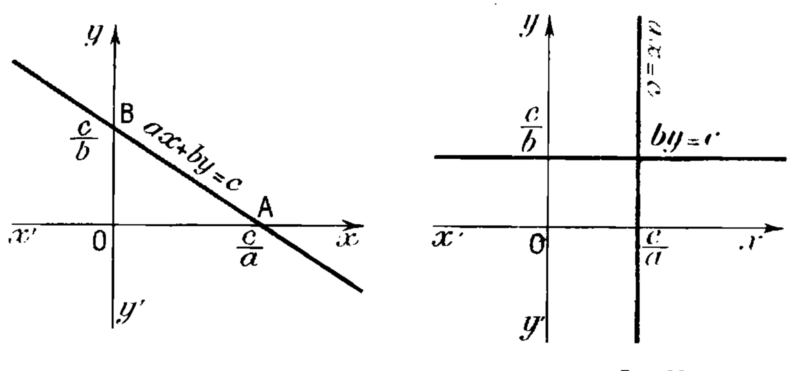


Fig. 21. Fig. 22.

3° Si $b = 0$, l'équation s'écrit : $ax = c$, ou $x = \frac{c}{a}\cdot$

La droite est la parallèle à Oy, d'abscisse égale à $\frac{c}{a}$ (fig. 22).

157. Intersection de deux droites. — Considérons deux droites concourantes (D) et (D') tracées sur un même graphique et leurs équations :

$$\begin{cases} ax + by = c & \text{(D)} \\ a'x + b'y = c' & \text{(D')}. \end{cases}$$

Les coordonnées x et y de leur point d'intersection M vérifient chacune de ces deux équations et constituent la solution du système formé par ces deux équations (n° 111). D'où la règle :

Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de deux droites il suffit de résoudre le système formé par les équations de ces deux droites.

Ainsi les deux droites : $y = x + 1$ et $y = -2x + 7$ se coupent au point M de coordonnées : $x = 2$, $y = 3$.

158. Résolution graphique d'un système. — Inversement, la lecture, sur le graphique, des coordonnées du point M fournit (tout au moins d'une façon approchée) la solution du système formé par les équations des deux droites (D) et (D').

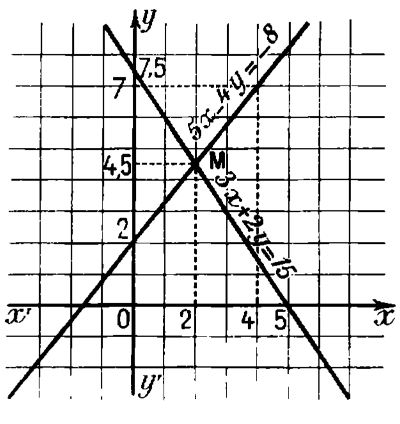


Fig. 23.

Exemple. — *Résoudre graphiquement le système :*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15 \\ 5x - 4y = -8. \end{cases}$$

Construisons sur un même graphique les droites définies par ces deux équations (fig. 23). Ces droites se coupent en un point M. D'après le graphique les coordonnées de ce point sont : $x = 2$; $y = 4,5$.

Ces deux nombres constituent la solution du système proposé, ce qui se vérifie par le calcul.

159. Mouvement uniforme. — ***Un mobile se déplace d'un mouvement uniforme lorsque l'espace parcouru est proportionnel au temps mis à le parcourir.***

La vitesse du mobile est l'espace parcouru pendant l'unité de temps.

Soit un point M qui se déplace sur un axe, dans le sens positif, à la vitesse de 5 unités à la seconde. En une seconde son abscisse s'accroît de + 5 et en t secondes, elle s'accroît de $5t$. Si à l'instant $t = 0$, elle est égale à + 7, elle est, au temps t, égale à :

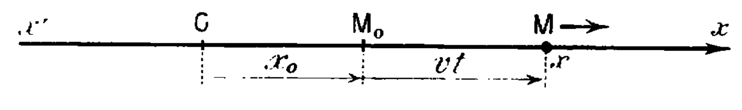


Fig. 24.

$$x = 7 + 5t.$$

D'une façon générale (fig. 24), si la vitesse est v et si l'abscisse au temps $t = 0$ est égale à x_0, l'abscisse au temps t est :

$$x = x_0 + vt.$$

Cette formule montre que *l'abscisse est une fonction du 1er degré du temps et que tout mouvement uniforme est représenté graphiquement par une droite.*

C'est pourquoi on utilise couramment les graphiques dans les problèmes de mouvement uniforme. Les horaires de chemin de fer, par exemple, sont établis à l'aide de graphiques.

160. Exemple I. — *Deux villes A et B sont distantes de 90 kilomètres. Un cycliste part à 6 heures de A et se dirige vers B à 30 km à l'heure. Une automobile part de B à 7 heures et se dirige vers A à 60 km à l'heure. Trouver l'heure et le lieu de la rencontre.*

1° ***Solution algébrique.*** Désignons par x l'heure de la rencontre et par y la distance à la ville A du lieu de cette rencontre.

De 6 h à x h, le cycliste a parcouru $30(x - 6)$ km. D'où :

$$y = 30(x - 6). \qquad (1)$$

De 7 h à x h, l'automobile a parcouru $60(x - 7)$ km. Comme elle était à 90 km du point A :

$$y = 90 - 60(x - 7). \qquad (2)$$

Résolvons le système formé par les équations (1) et (2). Nous obtenons :

$$x = \frac{23 \text{ h}}{3} = 7 \text{ h } 40 \text{ m}.$$

$$y = 50 \text{ km}.$$

2° ***Solution graphique.*** Graduons l'axe des abscisses en heures en commençant à 6 h et l'axe des ordonnées en kilomètres (fig. 25).

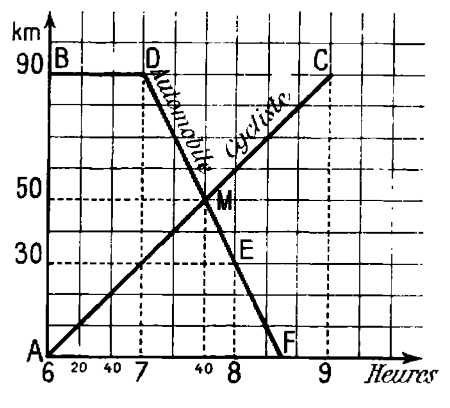


Fig. 25.

La marche du cycliste est représentée par le segment AC défini par le point A (6 h, 0 km) et le point C (9 h, 90 km). La marche de l'automobile est représentée par le segment DF défini par le point D (7 h, 90 km) et le point E (8 h, 30 km). Notons que les segments AC et BF font partie des droites définies par les équations (1) et (2), compte tenu de la graduation de l'axe des abscisses.

Les coordonnées du point M, intersection de AC et BF correspondent au point de rencontre : 7 h 40 et à 50 km de A.

161. Exemple II. — *Un cycliste part à 9 heures d'une ville A pour une ville B distante de 60 km. Il roule à 20 km à l'heure mais s'arrête 40 minutes à mi-parcours. Une automobile part de B à 9 h 40 m, arrive en A une heure plus tard et repart à 11 h pour être de retour en B à midi. Déterminer l'heure et la position de chacune des rencontres du cycliste et de l'automobile.*

Opérons graphiquement (fig. 26). La marche du cycliste est représentée par la ligne brisée ACDE. De A à C : 30 km en 1 h 30, de C à D arrêt de 40 minutes et de D à E : 30 km en 1 h 30.

La marche de l'automobile est représentée par FGHI. FG représente le trajet aller de 9 h 40 à 10 h 40, GH l'arrêt en A et HI le retour de 11 h à midi.

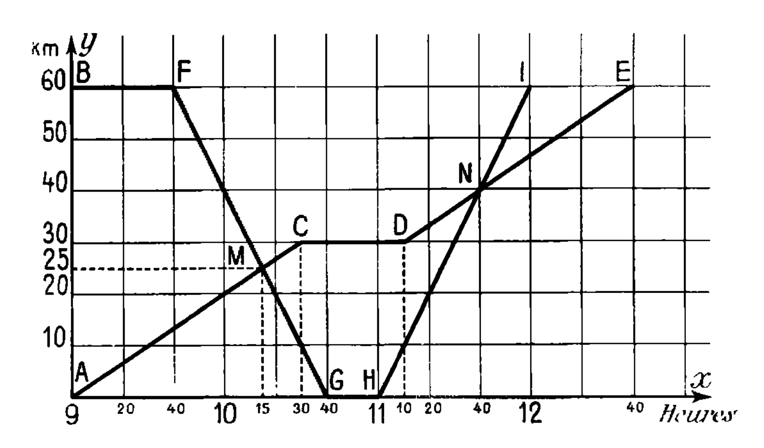


Fig. 26.

On voit que l'automobile croise le cycliste à 10 h 15 et à 25 km de A (coordonnées de M) et que l'automobile dépasse le cycliste à 11 h 40 et à 40 km de A (coordonnées de N).

En opérant de la même façon qu'à l'exercice précédent, on peut vérifier ces réponses par le calcul.

EXERCICES

Représenter graphiquement les équations suivantes :

600. $3x + 4y = 12.$

601. $5x - 3y = 15.$

602. $2x + 3y = -6.$

603. $-4x + 5y = 20.$

604. $5x + 3y = 9.$

605. $4x - 6y = 16.$

606. $7x + 2y = 21.$

607. $x - 2y = 7.$

— Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

608. $\begin{cases} 4x - y = 8. \\ 3x + 2y = 17. \end{cases}$

609. $\begin{cases} 3x - 5y = 13. \\ 2x + 3y = -4. \end{cases}$

610. $\begin{cases} x - 2y = -6. \\ 3x + y = -4. \end{cases}$

611. $\begin{cases} 3x - 2y = 12. \\ 4x + 5y = -7. \end{cases}$

612. $\begin{cases} 8x - 3y = 13. \\ 2x + y = 12. \end{cases}$

613. $\begin{cases} 5x - 4y = 10. \\ x + 2y = 9. \end{cases}$

614. $\begin{cases} 5x - 4y = 23. \\ 8x + 5y = 14. \end{cases}$

615. $\begin{cases} 3x - 2y = 19. \\ 7x + 4y = 14. \end{cases}$

616. Un automobiliste part de A à 7 h à la vitesse moyenne de 60 km /h et roule pendant 2 h 30 m. Il s'arrête pendant un quart d'heure et repart ensuite à la vitesse moyenne de 65 km /h pour atteindre une ville B distante de A de 345 km. Représenter graphiquement la marche de ce voyageur et indiquer à quelle heure il arrive en B.

617. Un cycliste part à 8 h pour parcourir une distance de 60 km. Il roule d'abord à 30 km /h puis à 20 km /h et arrive à 10 h 15 m. Trouver la distance parcourue à 30 km /h par le calcul, puis, à l'aide d'un graphique.

618. Un cycliste va d'une ville A à une ville B. Il part à 8 h à la vitesse de 20 km /h. Il s'arrête 1 h en B et revient en A à la vitesse de 15 km /h.

1° Calculer la distance AB sachant que le cycliste est revenu en A à 17 h 45 m.

2° Construire le graphique du mouvement du cycliste.

3° A midi, une automobile part de A à la vitesse de 60 km /h. A quelle heure et à quelle distance de A rencontrera-t-elle le cycliste?

4° Sur la même figure tracer le graphique du mouvement de l'automobile et interpréter la réponse du 3°.

619. Une route ACB comprend une montée AC de 30 km puis une descente CB. Deux cyclistes partent en même temps de A vers B à 10 h, le premier avec une vitesse de 10 km /h en montée et 16 km /h en descente, le second avec une vitesse de 8 km /h en montée et 20 km /h en descente. Ils arrivent en même temps au point B. Trouver graphiquement, puis par le calcul :

1° l'heure d'arrivée des cyclistes en B,

2° la distance AB.

620. Un bateau fait sur un fleuve le service entre une ville A et une ville B située à 36 km en aval de A. La vitesse du courant s'ajoute ou se retranche à la vitesse propre du bateau suivant qu'il descend ou remonte le courant.

1° Un bateau part à 8 h de A, arrive à 10 h en B, s'y arrête une heure, et repart pour A où il arrive à 14 h. Trouver la vitesse propre du bateau et celle du courant.

2° Un second bateau part de B pour A à 8 h 30 m avec une vitesse propre de 21 km /h. Il s'arrête 1 h 30 m en A et repart pour B. Déterminer graphiquement l'heure et le lieu de chacune des rencontres des deux bateaux.

621. La route qui relie deux villes A et B comporte de A vers B une montée puis une descente également inclinées. Un cycliste dont la vitesse moyenne en montée est 10 km /h et en descente 30 km /h met 1 h 30 m pour aller de A à B et 2 h 30 m pour aller de B à A.

1° Calculer les distances de A et B au point le plus élevé de la route.

2° Représenter graphiquement la marche du cycliste à l'aller et au retour.

(B.E.P.C.)

622. Deux cyclistes partent à 8 h d'un lieu A, sur une même route, dans le même sens, l'un à 14 km /h, l'autre à 21 km /h. Une auto part de A sur la même route, dans le même sens, une heure après, à la vitesse de 56 km /h.

1° Représenter graphiquement la marche des trois mobiles.

2° Déterminer graphiquement les moments où l'auto rencontrera chacun des deux cyclistes et le moment où il sera à égale distance de chacun d'eux.

3° Retrouver par le calcul les réponses qui viennent d'être obtenues.

(B.E.P.C.)

623. 1° Construire les droites D et D' représentant respectivement les variations des fonctions : (D) $y = 2x - 1$ (D') $y = -x + 3$.

2° Calculer les coordonnées du point d'intersection A de D et D'.

3° D coupe l'axe $y'y$ en B et D' coupe cet axe en C. Calculer l'aire du triangle ABC et la longueur du segment joignant les milieux des segments AB et BC.

(B.E.P.C.)

624. 1° Tracer les droites D_1 et D_2 représentant les variations des fonctions :

$$y = 2x - \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{x}{2} + 1$$

et calculer les coordonnées du point commun à ces deux droites.

2° A désignant le point de D_1 d'abscisse -1 et B le point de D_2 d'abscisse $+2$, tracer AB et trouver l'équation de la droite AB.

3° Par O, origine des axes de coordonnées, on mène la parallèle à la droite AB. Quelle est l'équation de cette parallèle? *(B.E.P.C.)*

625. 1° Construire les courbes représentatives des fonctions :

$$y = \frac{7x}{2} + 12 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{x}{2} + 3 \quad (2)$$

2° Indiquer les coordonnées de leur point commun M et vérifier par le calcul.

3° La droite (1) coupe Oy en A et la droite (2) coupe Oy en B. Calculer les coordonnées du milieu C de AB.

4° Former les équations des droites MC et MO (O origine des coordonnées).

5° Montrer que le triangle MOC est rectangle en M. *(B.E.P.C.)*

626. Un cycliste part de A pour aller en B (vitesse moyenne, 16 km à l'heure) un quart d'heure avant un car qui fait aussi le trajet AB. Le cycliste est dépassé par le car à 7,2 km de A ; le car reste 45 mn en B et, revenant vers A, rencontre le cycliste à 32 km de A.

Calculer la vitesse à l'heure du car et la distance AB. *(B.E.P.C.)*

627. Un piéton part à 8 heures de la ville A pour se rendre à la ville B, à la vitesse de 5 km à l'heure. Un cycliste part de A à 9 heures, à 15 km à l'heure, arrive en B, y reste 30 minutes et revient vers A.

1° A quelle heure le cycliste dépasse-t-il le piéton ?

2° La distance AB étant 30 km, à quelle distance de B le cycliste croise-t-il le piéton?

3° Représenter graphiquement la marche des mobiles. *(B.E.P.C.)*

628. Deux cyclistes partent à 8 h, dans la même direction, de deux villes A et B, vers la ville C. (B entre A et C.) AB = 40 km. AC = 120 km. Le cycliste M (parti de A) a une vitesse moyenne de 30 km/h. Le cycliste N (parti de B) a une vitesse moyenne de 20 km/h.

1° Donner les équations des mouvements des deux cyclistes. A quelle heure le premier cycliste rattrapera-t-il le deuxième (par le calcul)? Vérification graphique. Que remarquez-vous?

2° A quelle heure les deux cyclistes seront-ils à égale distance de B (l'un avant et l'autre après B) (par le calcul)? Donnez une solution graphique.

3° Les cyclistes après avoir atteint C reviennent vers A et B. Établir les équations des mouvements des deux cyclistes. *(B.E.P.C.)*

PROBLÈMES DE RÉVISION

629. Une pelouse a une superficie de 114 ares. Elle comprend une partie rectangulaire ABCD prolongée à chaque bout par les demi-cercles de diamètre AD et BC. La partie rectangulaire représente les 3/5 de la surface totale. Calculer à 1 dm près les dimensions de la pelouse.

630. Un réservoir cylindrique a 3,20 m de hauteur. Il est alimenté par une conduite qui débite 192 litres à la minute et qui le remplit en 8 h 20 m. Calculer le diamètre de ce réservoir.

631. Un rectangle a une superficie de 4,5414 ha. La largeur est les 2/3 de la longueur.

1° Calculer les dimensions du rectangle.

2° Calculer la longueur de la diagonale à 1 dm près.

632. On désigne par S, D et P la somme, la différence et le produit de deux nombres x et y. Démontrer la relation : $D^2 = S^2 - 4P$.

On donne $S = 135$ et $P = 4\,284$. Calculer D, puis x et y.

633. 1° Trouver le carré de la somme S de deux nombres x et y connaissant leur différence D et leur produit P.

2° La longueur d'un rectangle surpasse la largeur de 124 mètres et sa superficie est égale à 9,4752 ha. Trouver le demi-périmètre, puis les deux dimensions et la longueur de la diagonale de ce rectangle à 1 dm près.

634. Calculer la somme S et la différence D de deux nombres x et y connaissant leur produit P et la somme de leurs carrés A.

Application. L'aire d'un triangle rectangle est égale à 9,24 dm^2 et l'hypoténuse mesure 0,65 m. Trouver les longueurs des côtés de l'angle droit.

635. Deux nombres x et y ont pour somme S, pour différence D et la somme de leurs carrés est égale à A. Démontrer la relation : $D^2 = 2A - S^2$.

Application. Dans un triangle rectangle l'hypoténuse a mesure 130 cm et le rayon r du cercle inscrit mesure 14 cm.

1° Montrer que le périmètre du triangle est égal à $2(a + r)$.

2° Calculer la somme, la différence des côtés de l'angle droit, puis les longueurs de chacun de ces côtés.

636. Pour aller d'un village A à un village B un homme parcourt la distance AC à pied et la distance CB en autobus (C entre A et B). Si la vitesse de l'homme est 4 km/h est celle du véhicule 18 km/h, la durée totale du trajet est 27 minutes. Elle reste la même si la vitesse de l'homme est 5 km/h et celle de l'autobus 14,4 km/h. Calculer les distances AC et CB.

637. En augmentant la vitesse d'un train de 5 km/h on gagne 37 minutes 1/2 sur la durée du parcours. En diminuant la vitesse de 5 km/h on perd 50 minutes. Trouver la vitesse du train et la longueur du parcours.

638. Une somme de 27 500 F est divisée en trois parties; la première est placée à 3 %, la seconde à 4 %, la troisième à 6 %. Les intérêts obtenus en un an sont proportionnels aux trois nombres 1, 4 et 3. Trouver les trois parties de la somme placée.

639. Un capital placé à un certain taux rapporte en 15 mois 900 F d'intérêts. Un second capital, égal au premier, placé à un taux supérieur de 1/2 % au taux précédent, rapporte en 18 mois 1 260 F d'intérêts. Calculer les capitaux et les deux taux.

640. Une personne possède une certaine somme qu'elle partage inégalement entre trois héritiers proportionnellement aux nombres 7, 6 et 5. Puis par un second testament elle change ses dispositions et fait le partage proportionnellement à 6, 5 et 4. Lequel des héritiers gagne à ce partage nouveau? Lequel y perd? L'un des héritiers à 120 F de plus dans le second partage que dans le premier. Quelle est la valeur de l'héritage et quelles sont les trois parts?

641. Trois localités A, B, C sont reliées par des routes rectilignes.

1° Un voyageur parcourt le circuit ABCA à la vitesse de 60 km/h en 1 h 42 m. Quelle est la longueur totale du circuit?

2° Un second voyageur parcourt AB à la vitesse de 15 km/h, BC à la vitesse de 30 km/h et CA à la vitesse de 45 km/h. La durée du parcours AB vaut 4 fois celle de BC. En déduire le rapport des distances AB et BC.

3° La durée totale du circuit pour le second voyageur est 4 h 40 m. Calculer les distances AB, BC et CA.

642. Soient sur un axe xy deux points A et B d'abscisses $+3$ et -2. Déterminer les abscisses des points M et M′ tels que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{3}{5}$ et $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = -\frac{3}{5}$.

643. Calculer le côté du carré inscrit dans un triangle ABC dont la base BC mesure 30 cm et dont la hauteur AH mesure 20 cm, sachant qu'un côté du carré s'appuie sur la base du triangle.

644. Inscrire dans un triangle ABC de base BC = 15 cm, de hauteur AH = 10 cm un rectangle MNPQ dont le côté PQ s'appuie sur BC, sachant que le périmètre de ce rectangle vaut 22 cm.

Même exercice lorsque le périmètre vaut 50 cm.

645. Les côtés d'un triangle ABC sont $a = 18$ cm, $b = 15$ cm, $c = 21$ cm. Trouver un point M sur AB tel qu'en menant par M la parallèle à BC qui coupe AC en N, le périmètre du trapèze BMNC ait pour périmètre 48 cm.

Même exercice lorsque le périmètre vaut 72 cm.

646. Les côtés d'un triangle ABC sont $a = 15$ cm, $b = 12$ cm, $c = 8$ cm. Par un point M de BC on mène les parallèles MD et ME aux deux autres côtés. Déterminer M pour que l'on ait MD + ME = 9 cm.

647. Soit un angle droit xOy. Sur le côté Ox on porte deux points A et M tels que OA = 2 et OM = 3. Sur le côté Oy, on porte deux points B et N tels que OB = 4 et ON = 3. Les droites AB et MN se coupent en I. Quelles sont les distances de I aux deux côtés de l'angle xOy?

648. Les côtés d'un triangle ABC sont $a = 18$ cm, $b = 15$ cm, $c = 21$ cm. Calculer la longueur des segments déterminés sur BC par la bissectrice intérieure et par la bissectrice extérieure de l'angle BAC.

649. Soient sur un axe deux points A et B d'abscisses $+1$ et -3. Trouver deux points M et M′ de cet axe sachant que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AM'}} = -\frac{2}{7}$ et $\frac{\overline{BM}}{\overline{BM'}} = \frac{2}{7}$.

650. 1° Représenter graphiquement, sur un même système d'axes de coordonnées, en prenant 2 cm par unité, les droites ayant pour équations

$y = -2x + 6$, (1) $y = 2x + 2$, (2) $y = \frac{2}{3}x - 2$ (3).

2° On appelle A l'intersection des droites (1) et (3), B l'intersection des droites (1) et (2), C l'intersection des droites (2) et (3). Calculer les coordonnées de A, B, C et vérifier graphiquement les résultats du calcul.

3° On mène par C la parallèle à AB. Trouver son équation et les coordonnées de son intersection D avec l'axe des abscisses.

4° Former l'équation de la droite BD et déduire du résultat obtenu que BD est parallèle à AC. *(B.E.P.C.)*

651. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Construire les droites D_1 et D_2 ayant respectivement pour équations :

$$D_1 : y = -\frac{3}{2}x + 3. \qquad D_2 : y = \frac{2}{3}x.$$

2° D_1 coupe Ox et Oy en A et B respectivement; D_2 coupe D_1 en C. Calculer les coordonnées des points A, B et C. Montrer que le triangle ACO est rectangle en C.

3° D_2 coupe en E la droite D_3 d'équation $y = \frac{3}{2}x - 3$. Calculer les coordonnées du point E, puis celles du milieu I de CE. *(B.E.P.C.)*

652. 1° On pose : $y = \dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6} - \dfrac{(2x-2)x(2x-1)}{12}$.

Simplifier le deuxième membre de cette égalité, puis déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a $y = 7\,396$.

2° Simplifier l'expression : $z = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 5x} - \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 25x}$ puis vérifier que $z = \dfrac{y}{x+5}$.

Pour quelle valeur de x a-t-on $z = 0$?

3° On pose $Y = \dfrac{-2y}{z}$. Calculer Y en fonction de x. Quel est le sens de variation de la fonction Y? Tracer la ligne représentative (L) de cette fonction. Déterminer les coordonnées du point A où se coupent la ligne (L) et la droite (D) d'équation $y = 4x + 5$. *(B.E.P.C.)*

653. Trois points A, B, C ont pour coordonnées :

A $(x = 2, y = 2)$; B $(x = -2, y = 1)$; C $(x = 9/4, y = 1)$.

1° Écrire les équations des droites AB, AC, BC.

2° Montrer que le triangle BAC est rectangle en A.

3° Donner l'équation de la médiane AM du triangle ABC. En quels points la droite AM coupe-t-elle les axes de coordonnées? *(B.E.P.C.)*

654. Soient les fonctions $y = 3x + 2$, représentée par la droite D, et $Y = mx$ représentée par la droite D' (m est un nombre quelconque positif ou négatif).

1° Représenter graphiquement les deux fonctions $Y = mx$ et $y = 3x + 2$ (on prendra par exemple $m = 4$).

2° Soit P le point d'intersection des droites D et D'. Calculer les coordonnées de P en fonction de m.

3° Étudier à l'aide du graphique comment se déplace le point P sur la droite D lorsque m varie de $-\infty$ à $+\infty$. *(B.E.P.C.)*

655. 1° Simplifier l'expression : $y = \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{x+1}{x}}$.

Représenter graphiquement la fonction y ainsi obtenue. (On prendra sur les deux axes une unité égale à 2 cm).

2° Soient A le point où la courbe coupe l'axe des ordonnées, B celui où elle coupe l'axe des abscisses. Soit C le point de coordonnées (1, 0). Équation de la droite AC.

3° Démontrer que le triangle BAC est rectangle isocèle. *(B.E.P.C.)*

656. 1° Décomposer en produit de facteurs l'expression $1 - (2x + 1)^2$, en la rapprochant de l'expression $a^2 - b^2$. Faire la vérification pour $x = -\frac{1}{2}$.

2° On donne les deux fonctions $y = 2x + 2$ et $y = -2x$. Construire les droites (D) et (D') représentatives de ces deux fonctions. Déterminer les points de rencontre A et B de (D) avec les deux axes. Montrer que (D') passe par le milieu du segment AB. Calculer la distance de O à (D). *(B.E.P.C.)*

657. Deux segments AB et BC situés dans le prolongement l'un de l'autre ont pour longueurs AB = 2 cm et BC = 4 cm. Par les points A, B, C, dans le même sens, on mène les demi-droites AX, BY, CZ perpendiculaires à la droite AC. Soit D le point de BY situé à la distance BD = 5 cm du point B. On le relie à un point M variable sur AX. La droite MD coupe CZ en N. Soit x la longueur du segment AM exprimée en centimètres.

1° Quelle valeur faut-il attribuer à x pour que le point B soit en C? On désignera par P la position correspondante de M et l'on supposera désormais que le nombre positif x reste inférieur à la valeur que l'on vient de déterminer. Évaluer le rapport $\frac{CN}{PM}$ et calculer CN en fonction de x.

2° Montrer que les trapèzes AMDB et CNDB ont pour aires respectives $y_1 = x + 5$ et $y_2 = 40 - 4x$. Représenter graphiquement dans le même système d'axes les deux fonctions ainsi obtenues.

3° Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle les deux trapèzes ont des aires égales. Quelle est cette aire commune? Retrouver algébriquement les résultats. *(B.E.P.C.)*

658. Soit un trapèze ABCD rectangle en A et B. La grande base BC mesure 10 cm, la petite base AD mesure 7 cm, la hauteur AB mesure 4 cm.

1° Calculer DC.

2° M étant un point quelconque de la demi-droite AX qui porte AB, on mène par ce point la parallèle MN aux bases (N est sur la demi-droite DY qui porte DC). On pose AM = x. Calculer en fonction de x les longueurs y et z des segments DN et MN; représenter graphiquement leurs variations quand M se déplace sur AX. (On pourra utilement mener par D la parallèle DZ à AX.)

3° Le triangle DMN peut être isocèle si DN égale MN; pour quelle valeur de x cela se produit-il? Vérifier ce résultat sur le graphique.

4° Le triangle DMN peut encore être isocèle, mais cette fois avec DN = DM. Calculer alors x. Peut-on résoudre géométriquement cette question? *(B.E.P.C.)*

659. On donne un triangle rectangle ABC; A est le sommet de l'angle droit et les deux côtés de l'angle droit AB et AC ont pour longueur AB = 4 et AC = 3. On désigne par H le pied sur l'hypoténuse BC de la hauteur issue de A.

1° Calculer les longueurs des segments BC, BH, AH.

2° On prend sur le segment BH un point M, et l'on pose BM = x. La perpendiculaire à l'hypoténuse BC menée par le point M coupe le côté AB au point P; la parallèle menée par P à BC coupe le côté AC au point Q. Démontrer que les triangles MBP et APQ sont semblables au triangle ABC. Calculer en fonction de la longueur x les longueurs des segments PB, PA, PQ.

3° On pose y = PQ — BM. Exprimer y en fonction de x. Étudier cette fonction y de la variable x lorsque le point M décrit le segment BH; représenter graphiquement cette fonction. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité PQ = BM? Quelle est la longueur du segment QM lorsque cette condition est vérifiée? *(B.E.P.C.)*

660. 1° Résoudre algébriquement, puis graphiquement, le système :

$$\begin{cases} 2y - 6x + 8 = 0, & (1) \\ 3y + x - 5 = 0. & (2) \end{cases}$$

2° Soient D_1 la droite d'équation (1) et D_2 la droite d'équation (2). Que peut-on dire de ces deux droites?

La droite D_2 coupe $y'y$ en B. Former l'équation de la parallèle menée par le point B à la droite D_1.

3° La droite D_1 coupe D_2 en A et $y'y$ en C. Trouver l'équation de la médiane AM du triangle ABC. Calculer AM et vérifier que : $AM = \frac{BC}{2}$. *(B.E.P.C.)*

661. 1° Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} 4x - y = 8, & (1) \\ 3x + 2y = 17. & (2) \end{cases}$$

2° Résoudre algébriquement le même système et comparer les résultats.

3° Par le point A de coordonnées : $x = 0$, $y = 4$, on mène une parallèle à la droite d'équation (1). Former l'équation de cette parallèle et montrer que la droite d'équation : $y = -\frac{1}{4}x + 4$ la rencontre au point A.

4° Les deux droites passant par A coupent l'axe $x'x$ en B et C. Prouver que le triangle ABC est rectangle et en calculer les côtés de l'angle droit. *(B.E.P.C.)*

662. 1° Résoudre le système : $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{3y + 2x}{4} = \frac{3 - x}{8}. \\ \frac{x - 2}{3} = \frac{2x - y}{5} - \frac{1 + 4x}{15}. \end{cases}$

2° On donne l'équation $x - 6y - 3 = 0$. Exprimer y en fonction de x et construire la droite D_1 représentative de cette fonction dans un système d'axes rectangulaires.

3° On donne l'équation $x + y - 3 = 0$. Exprimer y en fonction de x et construire la droite D_2 représentative de cette fonction sur le même graphique que précédemment.

4° Trouver par le calcul le point d'intersection des droites D_1 et D_2. Vérifier sur le graphique. *(B.E.P.C.)*

663. 1° Résoudre le système : $\begin{cases} \frac{2x + 1}{4} - \frac{y + 2}{3} = 3, \\ 2(y + 2) = 3(2x + 1). \end{cases}$

2° Soient les fonctions (1) : $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ et (2) : $y = -x + 6$.

Tracer les droites D_1 et D_2 représentant respectivement ces deux fonctions. Lire sur le graphique les coordonnées du point C d'intersection de D_1 et D_2. La droite D_1 coupe l'axe des x en A et l'axe des y en M; la droite D_2 coupe l'axe des x en B. Lire sur le graphique les coordonnées de A et de B. Vérifier par le calcul les coordonnées des points A, B et C.

3° Calculer les distances AC et BC, puis déterminer l'équation de la droite BM. *(B.E.P.C.)*

664. 1° Transformer en un produit de facteurs l'expression :

$$(12x^2 - 3)(x + 3) + (x^2 - 9)(2x - 1).$$

2° Simplifier l'expression : $\dfrac{(12x^2-3)(x+3)+(x^2-9)(2x-1)}{4x^3-x}$

et montrer que, sauf pour certaines valeurs de x, que l'on indiquera, l'expression précédente se réduit à : $y = \dfrac{7x+21}{2x+1}$.

3° Déterminer x pour que y prenne la valeur $\dfrac{7}{2}$. Même question pour $y = \dfrac{7+\sqrt{3}}{2}$ (calculer la valeur à 0,01 près).

4° Pour quelles valeurs de x les deux termes de la fraction algébrique y sont-ils simultanément positifs? *(B.E.P.C.)*

665. 1° Simplifier l'expression : $\dfrac{(x^2+4x+4)(5+x)}{(25-x^2)(x+2)}$.

2° Construire sur un même graphique les droites (D_1) : $y = x + 2$ et (D_2) : $y = 5 - x$. On prendra pour unité le centimètre sur les deux axes. Calculer les coordonnées du point d'intersection, A, des deux droites.

3° La droite (D_1) coupe l'axe $y'Oy$ en B; la droite (D_2) coupe l'axe $x'Ox$ en C. Montrer que le triangle BAC est rectangle. Trouver l'équation du côté BC.

4° Soit M le milieu de BC. Trouver l'équation de la médiane AM. *(B.E.P.C.)*

666. 1° Montrer que l'expression $25x^2 - 49$ est le produit de deux binômes du premier degré et que le polynôme $25x^2 - 70x + 49$ est le carré d'un binôme du premier degré.

2° Montrer que l'expression : $S = \dfrac{5x-7}{25x^2-70x+49} - \dfrac{10x}{25x^2-49}$

peut se mettre après simplification sous la forme $\dfrac{A}{ax+b}$ où A, a et b sont des nombres indépendants de x.

3° Construire la droite D qui représente les variations de $y = \dfrac{A}{S}$.

667. Étant donnés deux axes de coordonnées rectangulaires, $x'Ox$ et $y'Oy$, on construit le point B de coordonnées $(-2, 0)$ et le point B' de coordonnées $(0, 1)$.

1° Former l'équation de la droite BB'. On prend sur cette droite un point A d'abscisse $x = 2$; déterminer l'ordonnée de ce point.

2° Construire la droite d'équation $y = -2x + 6$. Montrer qu'elle passe par le point A et déterminer les coordonnées du point C où cette droite coupe l'axe $y'y$.

3° Calculer les côtés du triangle ABC. Que peut-on dire de ce triangle ABC? (Unité de longueur : 1 cm).

668. 1° Tracer les deux droites (D_1) et (D_2) représentant les variations des deux fonctions :

$$y = 2x - 3,$$
$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

et calculer les coordonnées du point d'intersection, A, des deux droites (D_1) et (D_2) Sur quelle droite remarquable le point A se trouve-t-il?

2° Du point B, de coordonnées $x = 2$, $y = -1$, on trace la perpendiculaire (P) à la droite (D_1). Quelle est son équation? Quelle particularité présente cette droite?

3° Du même point B, on trace la parallèle, (Q), à la droite (D_2). Quelle est son équation? En quel point la droite (Q) coupe-t-elle l'axe des abscisses? *(B.E.P.C.)*

669. On donne une demi-circonférence de diamètre AB et de centre O et, sur cette demi-circonférence, deux points P et Q placés dans l'ordre A, P, Q, B et tels que $\widehat{AOP} = x$, $\widehat{POQ} = y$, l'unité d'angle étant le degré. On appelle I le point commun aux segments de droite OP et AQ.

1° Exprimer en fonction de x et de y les angles des triangles API et OQI.

2° Quelle relation lie x et y lorsque le triangle API est isocèle, AP étant égal à AI? Représenter graphiquement la variation de y en fonction de x quand x prend toutes *les valeurs possibles.*

3° Mêmes questions quand le triangle QOI est isocèle, QO étant égal à QI.

4° Déterminer par le calcul et aussi graphiquement les valeurs de x et de y lorsque les conditions des 2° et 3° sont toutes les deux réalisées, c'est-à-dire lorsque on a à la fois AP = AI et QO = QI. Dans ce cas, si l'on porte sur la seconde demi-circonférence de diamètre AB les arcs AP' = AP et AQ' = AQ, que peut-on dire du pentagone PQBQ'P'?

670. 1° Développer le produit : $(x - 1)(x + 8)$ et décomposer en produit de facteurs les deux polynômes : $5x^3 + 35x^2 - 40x$ et $4x^3 - 4x$.

2° Simplifier la fraction rationnelle : $\dfrac{5x^3 + 35x^2 - 40x}{4x^3 - 4x - 4x(x-1)^2}$.

3° Quelle est la valeur de cette fraction : *a*) quand on remplace x par -8 ; *b*) quand on remplace x par 8?

4° Pour quelle valeur de x cette fraction est-elle égale à $x + 2$? Solution graphique? *(B.E.P.C.)*

671. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$, un point A d'abscisse $+ 2$ sur l'axe $x'Ox$ et un point B d'ordonnée $+ 4$ sur l'axe $y'Oy$.

1° Quelle est la fonction dont la droite AB est la courbe représentative? (Équation de la droite AB.)

2° Soit la droite D_1 d'équation $y = 3x$; déterminer les coordonnées du point P de rencontre de D_1, avec la droite AB.

3° Considérer maintenant la droite D_2 d'équation $y = -3x$. Quelles sont les coordonnées du point de rencontre, M, de D_2 avec la droite AB?

4° Comparer les rapports $\dfrac{AM}{AP}$ et $\dfrac{BM}{BP}$ et donner leur valeur. *(B.E.P.C.)*

672. 1° Un piéton, marchaut à la vitesse de 6 km à l'heure, quitte un lieu A à 7 heures du matin se dirigeant vers un lieu B. Un cycliste, roulant à la vitesse de 15 km à l'heure, quitte A à 9 heures $\frac{1}{4}$ et poursuit le piéton.

A quelle distance de A rattrape-t-il le piéton et à quelle heure?

2° Le piéton atteint le lieu B d'où un autobus le ramène aussitôt vers A à la vitesse de 30 km à l'heure. Quelle est la distance AB sachant qu'il est de retour à midi?

3° Représenter graphiquement la marche du piéton entre 7 heures et midi.
Porter le temps en abscisses et la distance le séparant de A en ordonnées. Prendre pour origine des temps 7 heures et 2 cm pour 1 heure; prendre pour origine des espaces le lieu A et 1 cm pour 2 km.

Déterminer graphiquement le lieu et l'heure où l'autobus rattrape le cycliste, sachant que celui-ci s'en est retourné vers A à la même vitesse qu'à l'aller, aussitôt qu'il eût rattrapé le piéton. *(B.E.P.C.)*

673. Deux amis habitent, l'un Grenoble, l'autre Valence; ces deux villes sont distantes de 95 km. Ils décident de se rendre à bicyclette, le même jour, à Saint-Marcellin, situé sur la route de Grenoble à Valence à 43 km de cette dernière ville. Le premier quitte Grenoble à 7 heures et roule à la vitesse de 22 km à l'heure; le second quitte Valence à 7 heures 10 minutes et roule à la vitesse de 18 km à l'heure.

1° Quel est celui des deux amis qui arrivera le premier au rendez-vous et combien de temps avant l'autre?

2° A quelle heure chacun d'eux rencontrera-t-il un automobiliste qui part de Grenoble à 8 heures et arrive à 9 heures à Romans, situé sur la même route à 18 km de Valence? Résoudre ces deux questions par le calcul et contrôler par un graphique les résultats obtenus. *(B.E.P.C.)*

674. 1° Résoudre le système : $\begin{cases} x = 1{,}1\,t, \\ x = 0{,}75\,(t + 14). \end{cases}$

2° Un autocar A part d'une station et 14 minutes plus tard, un deuxième autocar. B, en part. B marche à 66 km /h. Par suite d'une avarie, A ne marche qu'à 45 km /h,

En prenant comme origine des temps le départ de B, et comme unités la minute et le kilomètre, exprimer, en fonction du temps, les distances parcourues par les deux autocars.

3° A quel moment et à quelle distance de la station de départ B rattrapera-t-il A?

4° Un motocycliste part de la station en même temps que B, à 80 km /h. Il rattrape A, fait demi-tour, à la rencontre de B, refait demi-tour pour rattraper A. Il continue ce mouvement d'un autocar à l'autre jusqu'à ce que les deux autocars se rejoignent. Quelle distance aura-t-il alors parcourue? *(B.E.P.C.)*

675. Deux mobiles partent au même instant de deux points A et B distants de 10 kilomètres et se déplacent sur la droite AB dans le même sens (le sens de A vers B); celui qui part de A est animé d'une vitesse constante de 9 kilomètres à l'heure; celui qui part de B, d'une vitesse constante de 2 kilomètres à l'heure.

1° Calculer, en fonction du temps t, exprimé en heures, les distances qui séparent chaque mobile du point A (l'origine des temps est l'instant où les mobiles partent de A et de B; l'origine des abscisses est le point A).

2° Sur un même graphique, représenter les espaces parcourus en fonction du temps (on représentera 1 heure par une longueur de 5 centimètres; on représentera 1 kilomètre par 1 centimètre).

3° Calculer à quel instant (en heures, minutes et secondes) et à quelle distance de A (à 1 mètre près) l'un des mobiles dépasse l'autre. Comment peut-on vérifier ces résultats sur le graphique? (On énumérera les mesures que l'on doit faire et les opérations que l'on doit effectuer.)

4° Déterminer graphiquement la distance qui sépare les deux mobiles, 1 heure 45 minutes après le départ (justifier la méthode employée).

(B.E.P.C.)



GÉOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE PLANE

Première Leçon

RAPPORT DE DEUX SEGMENTS

1. Définition. — La définition générale du rapport de deux grandeurs s'applique au cas de deux segments de droite :

On appelle rapport de deux segments de droite le nombre par lequel il faut multiplier le second pour obtenir le premier.

1er Exemple : AB est la somme de 3 segments égaux à CD (fig. 1).

On a : $AB = CD \times 3$. Donc : $\frac{AB}{CD} = 3$.

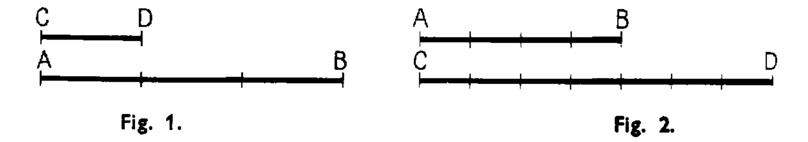


Fig. 1. Fig. 2.

2e Exemple : AB est la somme de 4 segments égaux au *septième* de CD (fig. 2).

On a : $AB = CD \times \frac{4}{7}$. Donc : $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{7}$.

Nous supposerons, dans ce qui suit, que le rapport de deux segments est un *nombre entier ou fractionnaire*. Cependant, il n'en est pas toujours ainsi. On peut en effet supposer qu'aucun sous-multiple de CD, si petit soit-il, ne soit contenu exactement dans AB.

2. Propriétés du rapport de deux segments. — Les propriétés des rapports de deux grandeurs deviennent ici :

1° ***Le rapport de deux segments est la mesure du premier quand on prend le second pour unité.***

Dans l'exemple I (fig. 1) le nombre 3 est la mesure de AB, l'unité étant CD.

Dans l'exemple II (fig. 2) $\frac{4}{7}$ est la mesure de AB, l'unité étant CD.

2° ***Le rapport de deux segments est égal au rapport des nombres qui les mesurent, avec la même unité.***

Ainsi, dans le symbole $\frac{AB}{CD}$ nous supposerons que AB et CD sont les *nombres* qui mesurent AB et CD avec la même unité. *La détermination du rapport de deux segments se trouve ramenée au calcul du quotient exact de leurs longueurs.*

3. Vecteurs portés par un axe. — Rappelons que :

La mesure algébrique $\overline{AB}$ ***d'un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***porté par un axe*** $\overrightarrow{x'x}$ ***s'obtient en affectant la longueur*** AB ***du signe*** + ***ou du signe*** —, ***suivant que le vecteur et l'axe sont de même sens ou non.***

Ainsi (fig. 3) : $\overline{AB} = +3$; $\overline{CD} = -5$; $\overline{BC} = +7$; etc.

Fig. 3.

Notons que : $\overline{BA} = -\overline{AB}$ et que la *relation de Chasles :*

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \iff \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

est valable quels que soient le sens de $\overrightarrow{x'x}$ et la disposition des points A, B et C.

Le rapport de deux vecteurs portés par un même axe est égal au quotient exact de leurs mesures algébriques sur cet axe.

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}; \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = +\frac{3}{5}.$$

Notons que le rapport ou le produit de $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ est positif ou négatif sui-

vant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens ou non. C'est pourquoi il est souvent inutile de préciser le sens de l'axe $x'x$ dans les relations entre les mesures algébriques de vecteurs portés par cet axe.

4. Segments proportionnels. — On dit que les segments AB, CD, EF, ... sont proportionnels aux segments A'B', C'D', E'F', ... si :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'} = \cdots = k.$$

Le nombre constant k est le rapport de proportionnalité. Ainsi :

1° Pour que quatre segments forment une proportion, il faut et il suffit que le produit des mesures des extrêmes soit égal au produit des mesures des moyens.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{équivaut à :} \quad AB \cdot C'D' = A'B' \cdot CD.$$

2° La mesure algébrique $\overline{AB}$ est moyenne proportionnelle entre les mesures $\overline{CD}$ et $\overline{EF}$ si :

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \iff \overline{AB}^2 = \overline{CD}.\overline{EF}.$$

On dit que AB est moyen proportionnel entre CD et EF.

3° Les mesures $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont proportionnelles à -5 et $+7$ si :

$$\frac{\overline{AB}}{-5} = \frac{\overline{CD}}{+7} \iff \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = -\frac{5}{7}.$$

POINTS DIVISANT UN SEGMENT DANS UN RAPPORT DONNÉ

5. Problème. — *Soit un segment* AB = 33 *cm porté par la droite xy* (fig. 4). *Trouver les points* M *de cette droite tels qu'on ait :* $\frac{MA}{MB} = \frac{4}{7}$.

On dit que les points M cherchés divisent le segment AB dans le rapport $\frac{4}{7}$.

1° *Existe-t-il un point* M *entre* A *et* B?

Soit M un point répondant à la question, situé entre A et B. Les deux segments MA et MB vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{4}{7} & (1) \\ AM + MB = AB = 33. & (2) \end{cases}$$

La relation (1) donne, compte tenu de la relation (2) :

$$\frac{MA}{4} = \frac{MB}{7} = \frac{MA + MB}{4 + 7} = \frac{33}{11} = 3.$$

On en déduit : $\frac{MA}{4} = 3$ donc : $MA = 3 \times 4 = 12.$

$\frac{MB}{7} = 3$ donc : $MB = 3 \times 7 = 21.$

Il existe donc, entre A et B, un point et un seul répondant à la question.

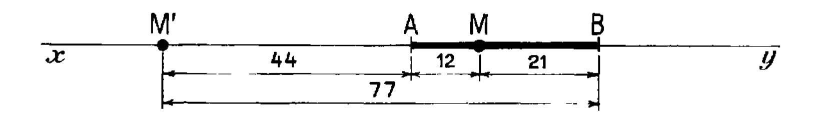


Fig. 4.

2° *Existe-t-il un point* M *sur la demi-droite* B*y* ?

Dans ce cas on a MA > MB; donc $\frac{MA}{MB} > 1$. Le rapport des deux segments ne peut donc être égal à $\frac{4}{7}$.

3° *Existe-t-il un point* M' *sur la demi-droite* A*x* ?

Les deux segments M'A et M'B vérifient alors les deux relations,

$$\begin{cases} \frac{M'A}{M'B} = \frac{4}{7} & (1) \\ M'B - M'A = AB = 33 & (2) \end{cases}$$

La proportion (1) donne, compte tenu de la relation (2) :

$$\frac{M'A}{4} = \frac{M'B}{7} = \frac{M'B - M'A}{7 - 4} = \frac{33}{3} = 11.$$

Donc : $M'A = 11 \times 4 = 44$ et $M'B = 11 \times 7 = 77.$

Il existe sur la demi-droite A*x* un point M' et un seul répondant à la question.

En définitive :

***Il existe deux points* M *et* M' *qui divisent le segment* AB *dans le rapport donné; l'un d'eux est entre* A *et* B; *l'autre est extérieur au segment* AB.**

Dans le premier cas, on dit que M divise AB en *deux segments additifs* MA et MB car la somme MA + MB est égale au segment donné.

Dans le second cas, on dit que M′ divise AB en *deux segments soustractifs* M′A et M′B car la différence M′B — M′A est égale au segment donné.

6. Théorèmes. — 1° Le résultat précédent est général :

Il existe deux points divisant un segment AB ***dans un rapport arithmétique donné k différent de l'unité.***

En effet si $\frac{MA}{MB} = 1$, on a MA = MB; il existe un point M répondant à la question, c'est le milieu de AB; il n'en existe pas d'autre car pour tout point M′ extérieur à AB, la différence des segments M′A et M′B est égale à AB; ces segments ne peuvent donc être égaux.

2° Si la droite *xy* est orientée, on a (fig. 3)

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{4}{7} \quad (\overline{MA} \text{ et } \overline{MB} \text{ de signes contraires}).$$

$$\frac{\overrightarrow{M'A}}{\overrightarrow{M'B}} = \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = +\frac{4}{7} \quad (\overline{M'A} \text{ et } \overline{M'B} \text{ de même signe}).$$

Il existe donc un point et un seul divisant un segment AB ***dans un rapport algébrique donné k différent de*** 1.

Si le rapport donné est positif, le point est extérieur à AB. Si le rapport donné est négatif, ce point est entre A et B. Si le rapport donné est nul, on a $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 0$ donc $\overline{MA} = 0$, le point cherché est en A.

EXERCICES

1. Soit un segment AB = 18 cm.

1° Trouver les points M et M′ qui divisent AB dans le rapport $\frac{5}{7}$.

2° Calculer le rapport $\frac{MA}{AB}$ (sans calculer MA) et le rapport $\frac{M'A}{AB}$ (sans calculer M′A).

3° Calculer MM′.

2. Soit un segment AB = 57 cm.

1° Trouver les points M et M′ qui divisent AB dans le rapport $\frac{11}{8}$.

2° Calculer MM′.

3. Soit un segment AB = a; M et M' les points qui divisent AB dans le rapport $\frac{2}{3}$.

1° Calculer, en fonction de a, les segments MA, MB, M'A et M'B.
2° Calculer MM'.

4. Soit un segment AB = a; M et M' les points qui divisent AB dans le rapport $\frac{m}{n}$. Calculer en fonction de a, m et n les segments MA, MB, M'A, M'B et MM'.

5. Le point M partage AB en segments additifs dans le rapport $\frac{3}{5}$. Sachant que AM = 9 cm, calculer AB.

6. Le point M' partage AB en segments soustractifs dans le rapport $\frac{7}{9}$. Sachant que M'A = 14 cm, calculer AB.

7. M et M' sont les points qui partagent AB dans le rapport $\frac{7}{13}$. Sachant que MM' = 91 cm. Calculer AB.

8. Trois segments AB, CD et EF mesurent 40 cm, 25 cm, et 56 cm. Calculer leur quatrième proportionnelle.
Généraliser lorsque les segments donnés sont mesurés par trois nombres a, b, c,

9. Trois segments sont mesurés en mètres par les fractions $\frac{12}{5}$, $\frac{19}{3}$ et $\frac{25}{7}$. Calculer leur quatrième proportionnelle.

10. Deux segments AB et CD mesurent 2 cm et 18 cm. Calculer leur moyenne proportionnelle.

11. Trouver les deux points M et M' qui divisent un segment AB = 78 mm dans le rapport $\frac{5}{8}$.

1° Soit O le milieu de AB, vérifier la relation : $\overline{OA}^2 = \overline{OM} \times \overline{OM'}$.

2° Vérifier la relation : $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AM'}}$.

3° Soit I le milieu de MM'. Calculer les rapports $\frac{\overline{IA}}{\overline{IM}}$ et $\frac{\overline{IM'}}{\overline{IB}}$.

12. On considère sur un axe $x'x$ les points fixes A et B tels que $\overline{AB} = 84$ mm.

1° Construire les points C et D de cet axe tels que : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{2}{5}$.

2° Soit O le milieu de CD. Calculer $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ et démontrer que :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OA}\,\overline{OB}. \qquad \text{et} \qquad \overline{BA}\cdot\overline{BO} = \overline{BC}\cdot\overline{BD}.$$

3° Démontrer que : $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2$.

THÉORÈME DE THALÈS

7. Énoncé général. — ***Lorsque des droites sont parallèles, elles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.***

Soient AB et CD deux segments déterminés sur la sécante Δ, A′B′ et C′D′ les segments correspondants déterminés sur Δ′ (fig. 5) par les parallèles AA′, BB′, CC′ DD′. Supposons que $\frac{AB}{CD}$ soit égal à $\frac{3}{5}$.

Nous pouvons donc partager AB en 3 segments et CD en 5 segments de telle sorte que les 8 segments ainsi obtenus soient égaux. Par les points de division, menons les parallèles à AA′, BB′... Ces parallèles partagent A′B′ et C′D′ en segments égaux. En effet, si des parallèles déterminent des segments égaux sur une sécante, elles déterminent des segments égaux sur toute autre sécante.

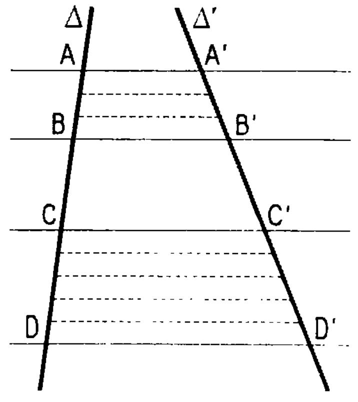


Fig. 5.

Il y a 3 de ces segments sur A′B′ et 5 sur C′D′. D'où : $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3}{5}$. Nous en concluons que $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$, soit en échangeant les moyens : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$.

On démontrerait de même que $\frac{A'B'}{AB}$ est égal à $\frac{B'C'}{BC}$ ou $\frac{A'C'}{AC}$, etc... soit :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'C'}{AC} = \dots$$

8. Remarque. — Nous pouvons supposer que les sécantes Δ et Δ' sont orientées. Les mesures algébriques des vecteurs de même sens $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$... sont de même signe et celles des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'D'}$ le sont également. Les rapports tels que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ ... égaux en valeur absolue, ont donc le même signe et nous pouvons écrire :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

9. Comment écrire les rapports égaux du théorème de Thalès.

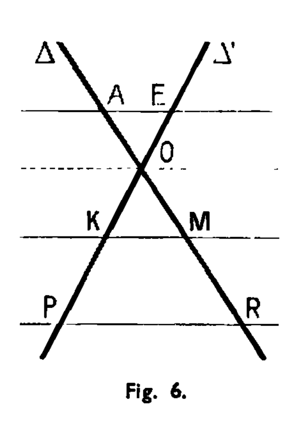


Fig. 6.

Les deux termes de chaque rapport doivent contenir au numérateur un segment de la première sécante et au dénominateur le segment correspondant de la seconde. Si on considère les rapports algébriques, il faut de plus, que les extrémités correspondantes de ces segments soient énoncées dans le même ordre.

Exemple. — Dans la figure n° 6 les sécantes Δ et Δ' se coupent en O. Nous pouvons toujours supposer qu'une parallèle passe par O.

Il est commode d'écrire $\left\{\begin{matrix}\text{AOMR}\\ \text{EOKP}\end{matrix}\right.$ en mettant sur une ligne les points de Δ et au-dessous les points correspondants de Δ'. Les segments de chaque rapport se correspondent ainsi verticalement. Nous obtenons :

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{EK}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{KP}}$$

10. Application au trapèze (1re *forme particulière du théorème de Thalès*).

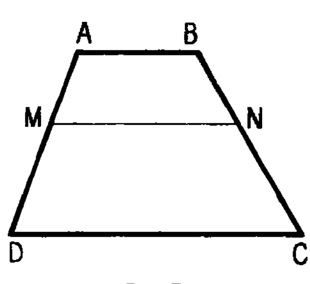


Fig. 7.

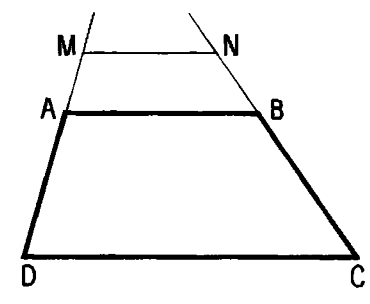


Fig. 8.

Toute parallèle aux bases d'un trapèze détermine sur les côtés non parallèles des segments proportionnels.

Quel que soit le cas de figure nous obtenons ainsi trois parallèles AB, MN et DC coupées par deux sécantes AMD et BNC (fig. 7 et 8). Donc :

$$\left\{\begin{matrix}\text{AMD}\\ \text{BNC}\end{matrix}\right. : \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$$

11. Réciproque. — ***Lorsqu'une sécante détermine des segments proportionnels sur les côtés non parallèles d'un trapèze, elle est parallèle aux bases.***

Soit un trapèze ABCD (fig. 9) et une sécante MN qui coupe AD en M et BC en N de telle sorte que :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{NC}} \quad \text{soit} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \qquad (1)$$

Par le point M menons la parallèle aux bases qui coupe BC en N′. D'après le théorème direct nous avons :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{N'B}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{N'C}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{N'B}}{\overline{N'C}} \qquad (2)$$

En rapprochant les égalités (1) et (2) nous obtenons :

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{N'B}}{\overline{N'C}}$$

Fig. 9.

Cette égalité montre que N et N′ partagent le segment BC dans le même rapport algébrique. Ces deux points sont confondus car (n° 6), il n'existe qu'un seul point divisant un segment dans un rapport algébrique donné.

Donc MN est parallèle aux deux bases AB et CD.

REMARQUE. — Si l'on ne considère que des rapports arithmétiques, il faut dans cette réciproque vérifier que les points M, A et D d'une part, N, B et C d'autre part ont bien même disposition.

12. Application au triangle (2[e] *forme particulière du th. de Thalès*).

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels.

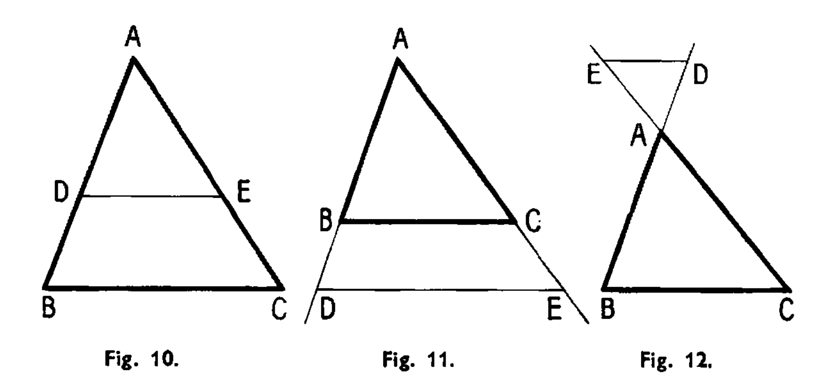


Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12.

Nous avons en effet (fig. 10 à 12) sur les sécantes ADB et AEC :

$$\left\{\begin{matrix} ADB \\ AEC \end{matrix}\right. : \qquad \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \qquad (1)$$

13. Réciproque. — ***Lorsqu'une sécante détermine des segments proportionnels sur deux côtés d'un triangle, elle est parallèle au troisième côté.***

Il suffit de reprendre la démonstration relative au trapèze (n° 11) en supposant B confondu avec A. Ainsi, lorsque dans un triangle ABC (fig. 10) on a : $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}$ la droite DE est parallèle à BC.

14. Remarque. — On écrit souvent les relations du théorème de Thalès appliqué au triangle sous l'une des trois formes :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}; \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{et} \quad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

chacune de ces proportions s'obtient en échangeant les moyens dans les proportions résultant des relations (1) du n° 12.

EXERCICES

13. On considère trois demi-droites Ox, Oy et Oz issues d'un point O. On prend sur Ox deux points A et A′ et on mène par A et A′ deux parallèles qui coupent Oy en B et B′ puis par B et B′ deux parallèles qui coupent Oz en C et C′.

1° Comparer les rapports $\frac{OA'}{OA}$, $\frac{OB'}{OB}$ et $\frac{OC'}{OC}$.

2° Montrer que les droites AC et A′C′ sont parallèles.

14. Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. On mène par le point G les parallèles aux côtés AB et AC qui coupent BC en D et E.

1° Évaluer les rapports $\frac{BD}{BC}$ et $\frac{EC}{BC}$.

2° Comparer les trois segments BD, DE et EC.

15. Par le point d'intersection O des diagonales du quadrilatère ABCD, on mène les parallèles aux côtés BC et CD. Ces parallèles coupent respectivement AB et AD en E et F.

1° Comparer les rapports $\frac{AO}{AC}$, $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AD}$.

2° Montrer que EF et BD sont parallèles.

16. Soit un triangle ABC. On prolonge BC de deux longueurs BD et CE égales à BC, puis on mène par D la parallèle à AB et par E la parallèle à AC. Ces deux droites se coupent en F et FA coupe BC en M.

1° Comparer les rapports $\frac{MA}{AF}$, $\frac{MB}{BD}$ et $\frac{MC}{CE}$.

2° Que représente M pour le segment BC ? Calculer la valeur du rapport $\frac{MA}{MF}$ et dire ce que représente le point A pour le triangle DEF.

17. Dans un parallélogramme ABCD, on mène par le point A une sécante qui coupe les droites BD, BC et CD respectivement en M, P et Q.

1° Comparer les rapports $\frac{MB}{MD}$ et $\frac{MA}{MQ}$ puis $\frac{MB}{MD}$ et $\frac{MP}{MA}$.

2° Démontrer la relation $\overline{MA}^2 = \overline{MP} \cdot \overline{MQ}$.

18. Dans un triangle ABC on mène les hauteurs BD et CE, puis dans le triangle ADE les hauteurs DF et EG.

1° Comparer les rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AG}{AD}$ puis les rapports $\frac{AD}{AC}$ et $\frac{AF}{AE}$.

2° En déduire l'égalité : AD.AE = AB.AG = AC.AF.

3° Montrer que FG et BC sont parallèles.

19. Sachant que BC désigne un segment donné ayant pour longueur 10 cm.

1° Construire le point M placé entre B et C tel que $\frac{BM}{MC} = \frac{3}{2}$. Calculer les longueurs des segments MB et MC.

2° a désignant un nombre positif donné à l'avance, on voudrait construire un triangle ABC dans lequel la longueur des côtés BA et CA exprimée en centimètres soit respectivement $3\,a$ et $2\,a$. Cette construction est-elle possible pour $a = 1$? Dire comment il faut choisir a pour que l'on puisse obtenir le point A.

3° En supposant le triangle ABC construit de telle sorte que $BA = 3\,a$ et que $CA = 2\,a$, on mène par le point C la parallèle à la droite AM qui coupe le prolongement de AB en D. Évaluer AD en fonction de a. Comparer les angles BAM et MAC.

(B.E.P.C.)

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE THALÈS

PROPRIÉTÉ DES BISSECTRICES D'UN TRIANGLE

15. Théorème. — ***La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en segments additifs proportionnels aux côtés adjacents.***

Soit AD la bissectrice intérieure de l'angle A du triangle ABC (fig. 13).

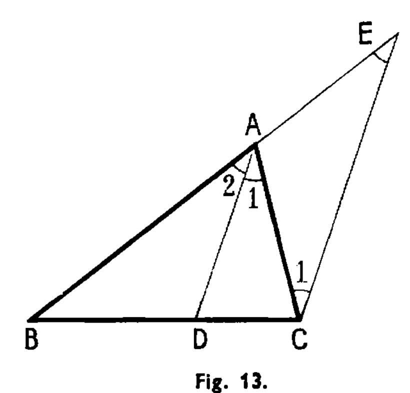


Fig. 13.

Menons par le point C la parallèle à DA. Elle coupe le prolongement de BA en E. Nous avons :

$\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1$ comme alternes internes.

$\widehat{E} = \widehat{A}_2$ comme correspondants.

$\widehat{A}_1$ étant égal à $\widehat{A}_2$, il en résulte que $\widehat{C}_1 = \widehat{E}$. Le triangle ACE est isocèle et AC = AE.

Or, d'après le théorème de Thalès appliqué au triangle BCE et à la parallèle AD au côté EC : $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DC}{AE}$.

Soit en remplaçant AE par son égal AC : $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$.

16. Théorème. — ***La bissectrice extérieure d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en segments soustractifs proportionnels aux côtés adjacents.***

La démonstration est analogue à la précédente (fig. 14). (Remplacer simplement D et E par D′ et E′). On obtient

$$\frac{D'B}{AB} = \frac{D'C}{AC}.$$

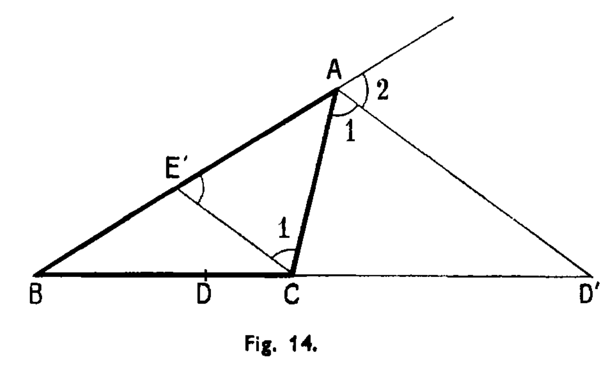


Fig. 14.

Remarque. — D'après les théorèmes précédents nous pouvons donc écrire (fig. 14) :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}.$$

Nous voyons ainsi que :

Les pieds des bissectrices d'un angle d'un triangle sont les points qui divisent intérieurement et extérieurement le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents.

CONSTRUCTIONS

17. Partage d'un segment en parties proportionnelles.

Soit à partager le segment AB en parties proportionnelles aux segments de longueurs données m, n et p (fig. 15). Sur une droite auxiliaire Ax, portons successivement les segments AC, CD et DE égaux à m, n et p. Joignons EB et menons par C et D les parallèles à EB. Elles coupent AB en F et G. D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{CD} = \frac{GB}{DE}$$

soit

$$\frac{AF}{m} = \frac{FG}{n} = \frac{GB}{p}$$

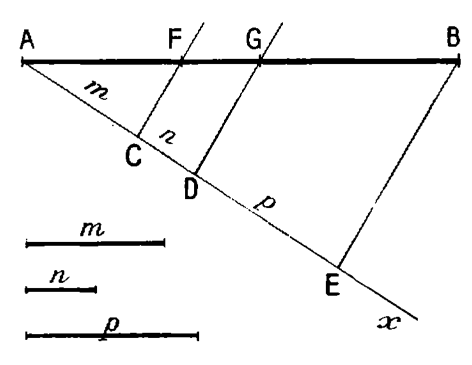


Fig. 15.

18. Construire les points qui divisent un segment dans un rapport donné.

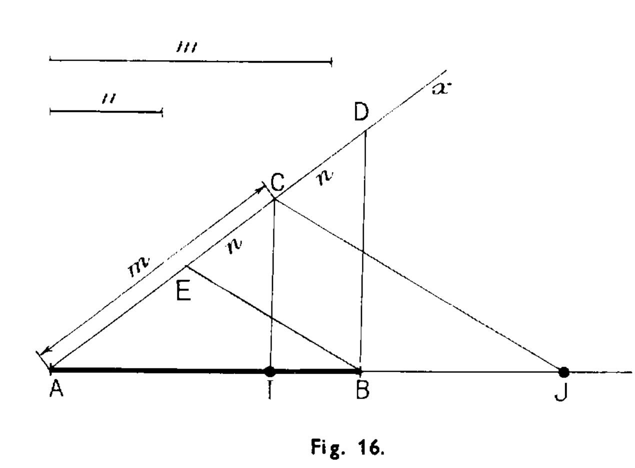


Fig. 16.

Soit à construire les points qui divisent intérieurement et extérieurement le segment AB dans le rapport $\frac{m}{n}$ de deux segments donnés. Sur une droite auxiliaire quelconque Ax portons AC $= m$ et CD $=$ CE $= n$. Joignons BD et BE et par C menons les parallèles à BD et BE. Ces parallèles coupent respectivement la droite AB en I et J.

D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{IA}{CA} = \frac{IB}{CD} \quad \text{soit} \quad \frac{IA}{IB} = \frac{CA}{CD} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{JA}{CA} = \frac{JB}{CE} \quad \text{soit} \quad \frac{JA}{JB} = \frac{CA}{CE} = \frac{m}{n}.$$

19. Quatrième proportionnelle à trois longueurs. — Soient a, b, c les trois longueurs données. Sur l'un des côtés d'un angle, portons OA $= a$ et AB $= b$. Puis sur le second côté portons OC $= c$. Joignons AC et par B menons la parallèle à AC. Elle coupe OC en D. D'après le théorème de Thalès on peut écrire :

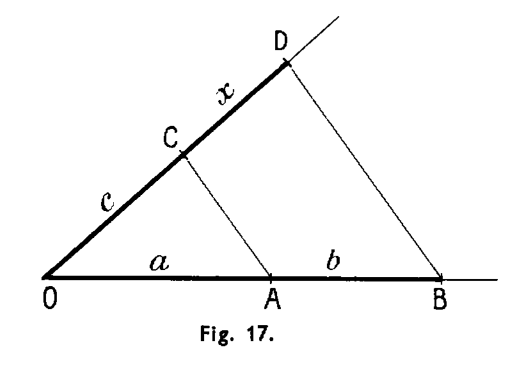


Fig. 17.

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}.$$

Soit :

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{CD}$$

Le segment $x =$ CD est la quatrième proportionnelle à a, b, et c.

EXERCICES

20. Soit un trapèze ABCD. Les côtés non parallèles AD et BC mesurent respectivement 8 cm et 6 cm.

1° Construire le point M de AD tel que : $\overline{MA} = \frac{3}{7}\overline{MD}$.

2° On prend sur le prolongement de CB un point N tel que NB = 4,5 cm. Comparer la direction de MN et celle des bases du trapèze.

21. Soit un triangle ABC dans lequel AB = 7 cm, AC = 3 cm, et BC = 5 cm. On mène les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A qui coupent le côté BC en D et E.

1° Calculer les segments DB, DC, EB et EC.

2° Soit M le milieu de DE. Calculer MD et montrer que l'on a : $\overline{MD}^2 = \overline{MB}.\overline{MC}$.

22. Dans un triangle ABC on a : AB = 24 cm, AC = 56 cm et BC = 40 cm. On mène les bissectrices intérieures AD, BE et CF qui se coupent en I.

1° Calculer les segments DB, DC, EA, EC, FA et FB.

2° Évaluer les rapports $\frac{ID}{IA}$, $\frac{IE}{IB}$ et $\frac{IF}{IC}$. Calculer leur produit.

23. Soient deux cordes AB et AC d'un cercle. On mène le diamètre IJ perpendiculaire à BC et qui coupe AB en E et AC en F.

1° Que représentent AI et AJ pour l'angle BAC?

2° Comparer les rapports $\frac{IE}{IF}$ et $\frac{JE}{JF}$.

24. Dans un triangle ABC, on désigne par D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C et par H l'orthocentre. Soit P l'intersection de AD et EF.

1° Montrer que la hauteur BE est bissectrice de l'angle DEF.

2° Comparer les rapports $\frac{AP}{AD}$ et $\frac{HP}{HD}$.

25. Deux tangentes en B et C à un cercle O se coupent en A. Soient D et E les intersections de AO et du cercle, et H l'intersection de AO et BC.

1° Que représentent BD et BE pour l'angle ABC?

2° Comparer les rapports $\frac{AE}{AD}$ et $\frac{HE}{HD}$.

26. On considère un quadrilatère ABCD inscriptible. Les droites AD et BC se coupent en M. On construit sur MA le point E tel que ME = MC et sur MB le point F tel que MF = MD.

1° Comparer les directions de AB et de EF, puis les rapports $\frac{MA}{MB}$ et $\frac{ME}{MF}$.

2° Démontrer la relation : $\overline{MA}.\overline{MD} = \overline{MB}.\overline{MC}$.

27. Dans un triangle ABC, on mène par le point A une demi-droite quelconque Ax. Construire par B et C deux parallèles coupant respectivement Ax en M et P de telle sorte que : $AM = \frac{2}{3} AP$.

28. Soit un triangle ABC. On prend un point D entre A et B et on prolonge AC d'une longueur CE = BD. La droite DE coupe BC en M et soit F l'intersection de AC et de la parallèle DF à BC.

1° Comparer les rapports $\frac{BD}{FC}$ et $\frac{AB}{AC}$.

2° Démontrer l'égalité : $\frac{DM}{ME} = \frac{AC}{AB}$.

29. Partager un segment AD en 3 segments consécutifs AC, CB et BD proportionnels à 15, 6 et 14.

1° Comparer les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$.

2° On suppose AD = 91 mm. Calculer les segments AC, CB et BD.

30. Soit un triangle isocèle OAB de base AB. On mène les hauteurs AD et BE et la perpendiculaire en B à OB qui coupe OA en F.

1° Comparer les rapports $\frac{OD}{OA}$ et $\frac{OB}{OF}$ et démontrer la relation $\overline{OA}^2 = \overline{OE}.\overline{OF}$.

2° Que représente BA pour l'angle EBF ? Comparer les rapports $\frac{BE}{BF}$ et $\frac{AE}{AF}$.

31. On trace sur une droite (D) les points A, P, Q, R, S se succédant dans cet ordre et tels que AP = PQ = QR = RS. On mène en Q et S les perpendiculaires *qq'* et *ss'* à (D). Un point B décrit la droite *ss'* et un point C décrit la droite *qq'*, déterminant un triangle variable ABC.

1° Sur quelles lignes se déplacent les points A' milieu de BC et G centre de gravité de ABC.

2° On donne A' arbitraire sur la ligne qu'il décrit. Construire le triangle ABC correspondant pour que AB = AC. Comparer les angles B ou C de ce triangle à l'angle ASA'.

3° Construire A' pour que ABC soit équilatéral.

4° Construire A' pour que le triangle isocèle ABC correspondant soit rectangle.

(B.E.P.C.)

32. On considère un triangle ABC et on mène la bissectrice intérieure de l'angle A qui rencontre en I le côté BC.

1° Calculer les côtés AB et AC sachant que :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BI}{IC} = \frac{1}{2} \quad \text{et que} \quad AB + AC = 12\,\text{cm}.$$

2° On suppose en outre, dans tout ce qui suit, que les angles ICA et IAC sont égaux et on trace le cercle circonscrit au triangle ABC qui recoupe la droite AI en D. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze isocèle. Calculer les longueurs DB et DC.

3° On mène par B la parallèle à CD qui rencontre AC en O. Montrer que le quadrilatère OBDC est un losange et que O est le milieu de AC.

4° En déduire la nature du triangle OAB et les mesures en degrés des angles du triangle ABC.

(B.E.P.C.)

TRIANGLES SEMBLABLES

20. Définition. — ***Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles respectivement égaux et leurs côtés proportionnels.***

Le théorème suivant montre qu'il existe effectivement des triangles semblables et permet de construire des triangles semblables à un triangle donné.

21. Théorème. — ***Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine avec les deux autres côtés un nouveau triangle semblable au premier.***

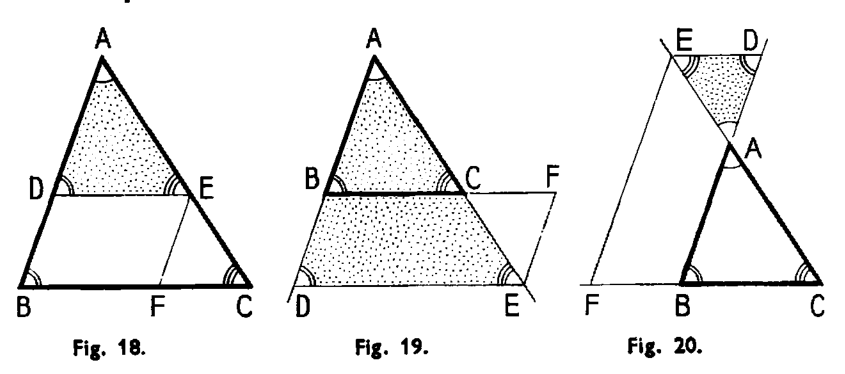


Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20.

Soit DE la parallèle au côté BC du triangle ABC.

1° Dans les figures 18 et 19 les deux triangles ADE et ABC ont l'angle A en commun, $\widehat{D} = \widehat{B}$ et $\widehat{E} = \widehat{C}$ comme correspondants. Dans la figure 20 les angles en A sont égaux comme opposés par le sommet, $\widehat{D} = \widehat{B}$ et $\widehat{E} = \widehat{C}$ comme alternes internes.

2° D'après le théorème de Thalès relatif aux sécantes ADB et AEC :

$$\left\{\begin{matrix} \text{ADB} \\ \text{AEC} \end{matrix}\right. : \qquad \frac{\text{AD}}{\text{AE}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}} \quad \text{soit} \quad \frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{AC}}.$$

Par E menons la parallèle à AB. Elle coupe BC en F. D'après le théorème de Thalès relatif aux sécantes AEC et BFC :

$$\left\{\begin{matrix} \text{AEC} \\ \text{BFC} \end{matrix}\right. : \qquad \frac{\text{AE}}{\text{BF}} = \frac{\text{AC}}{\text{BC}} \quad \text{soit} \quad \frac{\text{AE}}{\text{AC}} = \frac{\text{BF}}{\text{BC}}.$$

Or dans le parallélogramme DEFB les côtés BF et DE sont égaux. La proportion précédente s'écrit donc : $\frac{\text{AE}}{\text{AC}} = \frac{\text{DE}}{\text{BC}}$. (2)

Soit en rapprochant les égalités (1) et (2) : $\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{AC}} = \frac{\text{DE}}{\text{BC}}$.

Les triangles ADE et ABC ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels sont donc semblables (n° 20). Notons que :

***Tout triangle égal au triangle* ADE *est semblable au triangle* ABC.**

22. Éléments homologues, rapport de similitude. — Les éléments correspondants de deux triangles semblables sont dits *homologues*. Deux côtés homologues sont opposés à des angles homologues. Deux hauteurs homologues sont issues de deux sommets homologues, etc...

Le rapport de similitude de deux triangles semblables est le rapport de deux côtés homologues.

Si k désigne le rapport de similitude du triangle ADE et du triangle ABC (fig. 18), on peut écrire : $\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{AC}} = \frac{\text{DE}}{\text{BC}} = k$.

Et l'on a : $\text{AD} = k.\text{AB}$; $\text{AE} = k.\text{AC}$ et $\text{DE} = k.\text{BC}$.

PREMIÈRES APPLICATIONS

23. Divisions semblables portées par deux droites parallèles.

Soient A, B, C, D et A', B', C', D' les intersections de deux parallèles Δ et Δ' par des droites issues d'un même point O (fig. 21 et 22).

Il résulte du théorème de Thalès (n° 13) que :

$$\frac{\text{OA}'}{\text{OA}} = \frac{\text{OB}'}{\text{OB}} = \frac{\text{OC}'}{\text{OC}} = \frac{\text{OD}'}{\text{OD}} \qquad (1)$$

Les triangles tels que OA'B' et OAB sont semblables (n° 21). Donc (n° 22) :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}. \qquad (2)$$

En considérant les triangles semblables OB'C' et OBC, puis OC'D' et OCD, on obtient de même : $\frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB}$ et $\frac{C'D'}{CD} = \frac{OC'}{OC}$. (3) (4)

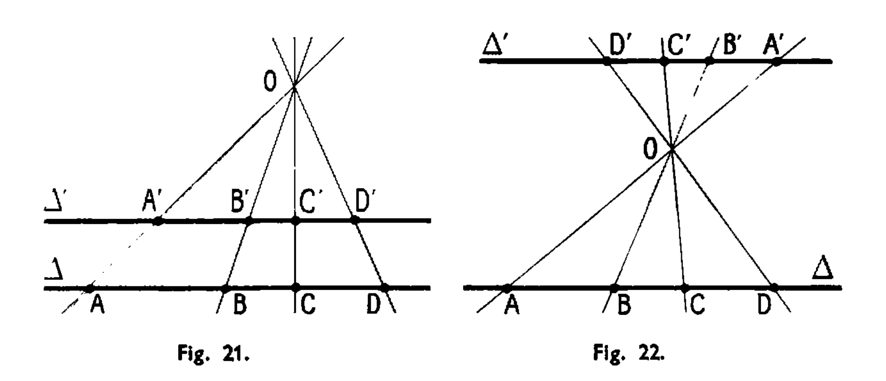


Fig. 21. Fig. 22.

Les proportions (2), (3) et (4), montrent que les rapports $\frac{A'B'}{AB}, \frac{B'C'}{BC}$ et $\frac{C'D'}{CD}$ sont égaux à l'un des rapports de la suite (1). Comme d'autre part les segments AB, BC, CD sont de même sens et qu'il en est de même de A'B', B'C' et C'D' on peut écrire : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}$.

Les droites issues de O déterminent donc sur Δ et Δ' des segments correspondants proportionnels :

THÉORÈME. — ***Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des segments homologues proportionnels.***

REMARQUE. — Les points A, B, C, D et A', B', C', D' portés par Δ et Δ' respectivement et tels que l'on ait $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$ réalisent, par définition, *des divisions semblables :* ABCD sur Δ et A'B'C'D' sur Δ'. Le théorème de Thalès (n° 7) et le théorème précédent peuvent s'énoncer :

Des parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des divisions semblables.

Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des divisions semblables.

24. Réciproque. — ***Lorsque trois droites déterminent sur deux sécantes parallèles des segments homologues proportionnels, elles sont concourantes.***

Supposons que les droites AA′ et BB′ se coupent en O (fig. 23). La droite OC coupe A′B′ en C″ tel que :

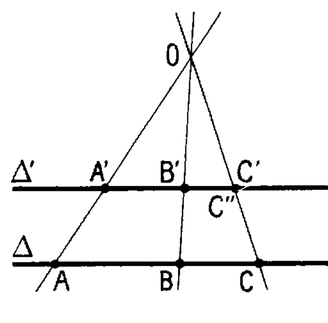


Fig. 23.

$$\frac{\overline{B'C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Comme par hypothèse : $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$,

nous en concluons que : $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'C''}}{\overline{BC}}$.

Soit : $\overline{B'C''} = \overline{B'C'}$.

Les points C″ et C′ sont confondus et CC′ passe donc par O.

Si les droites AA′ et BB′ sont parallèles le quadrilatère ABB′A′ est un parallélogramme, par suite AB = A′B′. L'hypothèse donne alors BC = B′C′ et CC′ est donc parallèle à AA′.

Les divisions ABC et A′B′C′ sont alors *égales*.

25. Corollaire. — ***La droite qui joint les milieux des bases d'un trapèze passe par le point de rencontre des côtés non parallèles et par le point de rencontre des diagonales.***

L'égalité $\frac{\overline{AM}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{NC}}$ montre, d'après la réciproque précédente, que les droites AD, MN et BC sont concourantes (fig. 24).

De même l'égalité $\frac{\overline{AM}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{ND}}$ montre que les droites AC, MN et BD sont concourantes.

Cette propriété permet de construire les milieux M et N des bases d'un trapèze donné à l'aide de la règle seulement, et par suite de diviser en 2, 4, 8, 16... parties égales deux segments parallèles donnés.

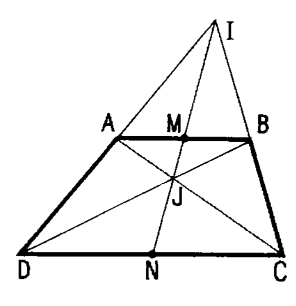


Fig. 24.

EXERCICES

33. Soit un trapèze ABCD, la petite base AB = 28 mm, et la grande base CD = 35 mm. Par le point M de AD tel que AM = $\frac{3}{4}$ MD, on mène la parallèle aux bases qui coupe BD en P et BC en N.

1° Calculer les longueurs MP, PN et MN.

2° Généraliser en désignant par a et b les deux bases et par $\frac{m}{n}$ le rapport $\frac{\text{AM}}{\text{MD}}$.

34. Par le point de rencontre O des diagonales du trapèze ABCD, on mène la parallèle aux bases AB et CD, qui coupe AD en M et BC en N.

1° Comparer les rapports $\frac{\text{MO}}{\text{CD}}$ et $\frac{\text{ON}}{\text{CD}}$. Montrer que O est le milieu de MN.

2° Calculer le segment MN en fonction de AB = a et CD = b, et démontrer la relation : $\frac{2}{\text{MN}} = \frac{1}{\text{AB}} + \frac{1}{\text{CD}}$.

35. Soit un trapèze ABCD. On mène une parallèle aux bases AB et CD qui coupe respectivement AD, BC, AC et BD en M, N, P et Q.

1° Comparer les rapports $\frac{\text{MP}}{\text{CD}}$ et $\frac{\text{QN}}{\text{CD}}$, puis les segments MP et QN.

2° Montrer que MN et PQ ont même milieu.

36. Soient AH et BK les distances de deux points donnés A et B à une droite D qui coupe AB en I.

1° Comparer les rapports $\frac{\text{IA}}{\text{IB}}$ et $\frac{\text{AH}}{\text{BK}}$.

2° On suppose $\frac{\text{AH}}{\text{BK}} = \frac{4}{7}$. Comment faut-il construire la droite D pour qu'elle passe par un point donné C?

37. Soient deux droites Δ et Δ' qu'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de rencontre. On mène par un point donné M une sécante qui coupe Δ en A et Δ' en A' puis une parallèle à cette sécante qui coupe Δ en B et Δ' en B'.

1° Construire le point N de BB' tel que $\frac{\overline{\text{NB}}}{\overline{\text{NB'}}} = \frac{\overline{\text{MA}}}{\overline{\text{MA'}}}$.

2° Montrer que MN, Δ et Δ' sont concourantes.

38. Dans un triangle ABC, on mène par un point P du côté BC la parallèle à la médiane AD qui coupe les droites AB et AC en M et N respectivement.

1° Comparer les rapports $\frac{\text{AM}}{\text{AB}}$ et $\frac{\text{AN}}{\text{AC}}$.

2° Évaluer les rapports $\frac{\text{PM}}{\text{DA}}$ et $\frac{\text{PN}}{\text{DA}}$ et montrer que : PM + PN = 2 AD.

39. Soient deux cercles extérieurs de centres O et O' et de rayons R et R'. On mène les rayons OA et O'A' parallèles et de même sens. AA' coupe OO' en I.

1° Évaluer en fonction de R et R' les rapports $\frac{\text{IO'}}{\text{IO}}$ et $\frac{\text{IA'}}{\text{IA}}$.

2° Montrer que les tangentes communes extérieures aux deux cercles passent par I.

3° Reprendre le problème avec les rayons OA et O'A'' parallèles et de sens contraires et en considérant les tangentes communes intérieures.

40. Soient deux droites perpendiculaires Ox et Oy se coupant en O. On prend sur Ox, de part et d'autre de O, les deux points A et B tels que : OA = 4 cm et OB = 2 cm. Soit M un point pris sur la médiatrice de AB. Les droites MA et MB coupent respectivement Oy en C et D. Soit E le milieu de CA et F le milieu de DB.

1° Quelle est la nature des triangles MAB, BFO, EAO ? Montrer qu'ils sont semblables et donner la valeur des rapports de similitude.

2° Démontrer que le quadrilatère EOFM est un parallélogramme.

3° La droite EF coupe Ox en P. Évaluer le rapport $\frac{PO}{PA}$. Calculer PO. Que peut-on dire des droites EF quand le point M décrit la médiatrice de AB ?

(B.E.P.C.)

41. Deux cercles O et O′ se coupent en A et B. On mène un rayon OM et le diamètre parallèle NO′P. La droite OO′ coupe MN en I et MP en J (J extérieur à OO′).

1° Évaluer en fonction de R et R′ les rapports $\frac{\overline{IO'}}{\overline{IO}}$ et $\frac{\overline{JO'}}{\overline{JO}}$.

2° Que représentent AI et AJ pour l'angle OAO′ ? Montrer que le cercle de diamètre IJ passe par A et B.

3° La droite JA recoupe les cercles O et O′ en C et D. Comparer les triangles JOC et JO′A, puis JOA et JO′D. En déduire la relation : $\overline{JA}^2 = \overline{JC} \cdot \overline{JD}$.

42. Deux cercles O et O′ sont tangents extérieurement en A et ont pour rayons : OA = 4 cm et O′A = 2 cm. Par le point A on mène deux cordes variables perpendiculaires : AB dans le cercle O et AC dans le cercle O′

1° Montrer que OB et O′C sont parallèles.

2° La droite BC coupe la droite OO′ au point I. Montrer que I est fixe et préciser sa position en calculant IO et IO′.

3° On mène la droite OH perpendiculaire en H à BC. Sur quelle courbe se déplace le point H lorsque B décrit le cercle O ?

4° Construire AB et AC de façon que BC = 5 cm. *(B.E.P.C.)*

43. Soit P un point quelconque d'un demi-cercle de diamètre AB = 2 R et de centre O. Le cercle de centre A et de rayon AP coupe AB et son prolongement aux points M et N.

1° Montrer que BP est tangent au cercle A. Calculer, dans le cas particulier où AP = R, les angles du triangle APB.

2° Si G est le centre de gravité du triangle MPN, et si I est celui du triangle APB, démontrer que IG conserve une longueur et une direction constantes lorsque P varie.

3° La parallèle à PO, menée par G, coupe AB en E. Démontrer que E est un point fixe et calculer EG en fonction de R. Sur quelle ligne se déplace le point G lorsque P décrit le demi-cercle AB ? Préciser les positions limites de G.

(B.E.P.C.)

5e Leçon

CAS DE SIMILITUDE DES TRIANGLES

26. Cas de similitude. — Les théorèmes suivants, connus sous le nom de cas de similitude, constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux triangles soient semblables. Leur emploi est analogue à celui des cas d'égalité des triangles.

27. 1er cas. — *Lorsque deux triangles ont deux angles respectivement égaux, ils sont semblables.*

Hypothèse :
$\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$

Conclusion :
ABC et A'B'C'
sont semblables

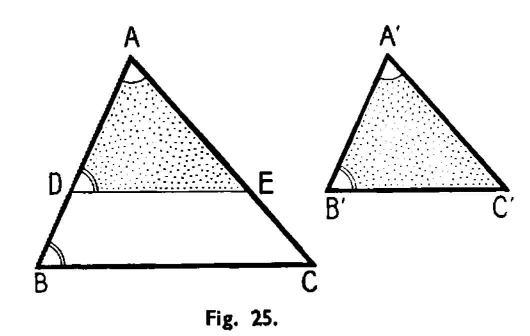


Fig. 25.

Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que $\widehat{A} = \widehat{A}'$ et $\widehat{B} = \widehat{B}'$ (fig. 25).

Transportons le triangle A'B'C' sur ABC de façon que les angles égaux $\widehat{A}'$ et $\widehat{A}$ coïncident et que A'B' vienne en AD et A'C' en AE.

Les angles ADE et ABC étant égaux, les droites DE et BC sont parallèles. Le triangle ABC est semblable à ADE (no 21), donc à A'B'C'.

28. 2e cas. — *Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ils sont semblables.*

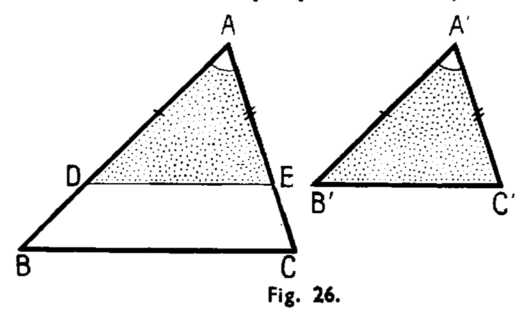


Fig. 26.

Hypothèse :

$\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

Conclusion :

ABC et A'B'C' sont semblables.

Opérons comme précédemment (fig. 26). A'B' et A'C' étant proportionnels à AB et AC, il en résulte que : $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$. Les droites DE et BC sont donc parallèles (nº 13). Le triangle ABC est semblable à ADE (nº 21), donc à A'B'C'.

29. 3e cas. — *Lorsque deux triangles ont leurs trois côtés proportionnels, ils sont semblables.*

Hypothèse :

$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC}$

Conclusion :

ABC et A'B'C' sont semblables.

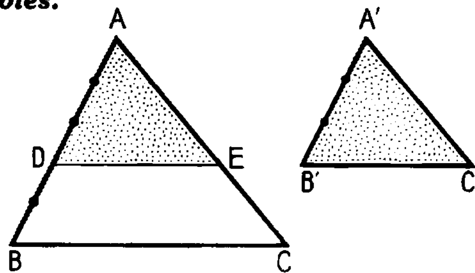


Fig. 27.

Supposons que les rapports $\dfrac{A'B'}{AB}$, $\dfrac{B'C'}{BC}$ et $\dfrac{C'A'}{CA}$ soient égaux à $\dfrac{3}{5}$ (fig. 27) :

$$A'B' = \frac{3}{5}\,AB, \qquad B'C' = \frac{3}{5}\,BC \qquad \text{et} \qquad C'A' = \frac{3}{5}\,CA. \qquad (1)$$

Construisons sur AB le point D tel que $AD = \dfrac{3}{5}\,AB$ et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable au triangle ABC (nº 21). Le rapport de similitude étant $\dfrac{3}{5}$ nous avons :

$$AD = \frac{3}{5}\,AB, \qquad DE = \frac{3}{5}\,BC \qquad \text{et} \qquad EA = \frac{3}{5}\,CA \qquad (2)$$

Les deux triangles ADE et A'B'C' ont donc leurs trois côtés respectivement égaux. Le triangle A'B'C', égal au triangle ADE, est par suite semblable au triangle ABC.

30. Corollaires. — Il résulte des cas de similitude précédents que :

1° ***Deux triangles équilatéraux sont semblables*** (angles égaux).

2° ***Deux triangles isocèles qui ont même angle au sommet (ou mêmes angles adjacents à la base), sont semblables*** (angles égaux).

En particulier : *Deux triangles rectangles isocèles sont semblables.*

3° ***Deux triangles rectangles qui ont un angle aigu égal sont semblables*** (angles égaux).

4° ***Deux triangles rectangles qui ont les côtés de l'angle droit proportionnels sont semblables*** (2e cas de similitude).

31. Cas spécial aux triangles rectangles.

Lorsque deux triangles rectangles ont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit proportionnels, ils sont semblables.

Hypothèse :
$\widehat{A} = \widehat{A'} = 1^D$
$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$
Conclusion :
ABC et A'B'C' sont semblables.

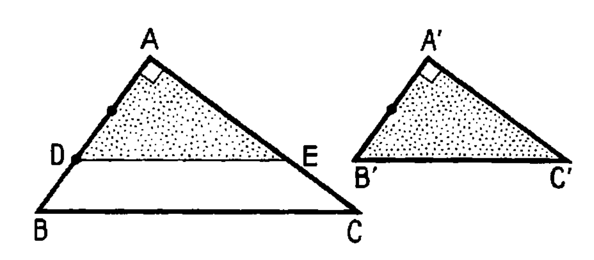


Fig. 28.

Supposons que $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{2}{3}$ (fig. 28). Nous avons $A'B' = \dfrac{2}{3}$ AB et $B'C' = \dfrac{2}{3}$ BC. Construisons le point D de AB tel que $AD = \dfrac{2}{3}$ AB et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable au triangle ABC et puisque le rapport de similitude est $\dfrac{2}{3}$ nous avons $DE = \dfrac{2}{3}$ BC. Nous en concluons que AD = A'B' et DE = B'C'. Les triangles rectangles ADE et A'B'C' ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, sont égaux Le triangle A'B'C', égal au triangle ADE, est donc semblable au triangle ABC.

EXERCICES

44. Soient deux triangles semblables ABC et A'B'C'. On mène les bissectrices intérieures AD et A'D' des angles homologues A et A'.

1° Comparer les triangles ABD et A'B'D' puis les triangles ACD et A'C'D'.

2° Comparer $\frac{A'D'}{AD}$ et $\frac{A'B'}{AB}$.

45. Reprendre le problème précédent en considérant AD et A'D' comme étant les médianes relatives à BC et B'C'.

46. Soient O et O' les centres des cercles circonscrits aux triangles semblables ABC et A'B'C'.

1° Comparer les triangles BOC et B'O'C'.

2° Montrer que le rapport $\frac{O'A'}{OA}$ est égal au rapport de similitude des deux triangles.

47. Soit un angle xOy et un point A de sa bissectrice. On construit sur Ox le point B tel que $OB = \frac{3}{5}OA$ et sur Oy le point C tel que $OC = \frac{5}{3}OA$.

1° Comparer les triangles OBA et OAC.

2° Montrer que le cercle OAC est tangent en A à AB.

48. Deux cercles O et O' se coupent en A et B. Les tangentes en B à ces deux cercles recoupent ces cercles en C et D.

1° Comparer les triangles ABC et ADB.

2° Que représente la droite AB pour l'angle CAD?

3° Démontrer les relations : $\overline{AB}^2 = AC.AD$ et $\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{AC}{AD}$.

49. On considère deux cercles O et O' se coupant en A et B. Une sécante passant par B coupe le cercle O en P et le cercle O' en Q.

1° Comparer les triangles AOO' et APQ. Conséquences?

2° Comparer les triangles AOP et AO'Q.

50. Soient deux cercles O et O' se coupant en A et A'. On mène par le point A' une sécante mobile coupant le premier cercle en B et le second en C.

1° Montrer que les triangles ABC et AOO' sont semblables.

2° En déduire que le triangle ABC reste semblable à lui-même lorsque la sécante BC tourne autour de A'.

51. Soit un triangle ABC. On mène la hauteur AD et les perpendiculaires BE et CF à une droite xy passant par A.

1° Montrer que les quadrilatères ADBE et ADCF sont inscriptibles.

2° Comparer les triangles ABC et DEF.

52. Deux cercles de centres O et O' et de rayons R et R' sont tangents au point A Une sécante issue de A recoupe ces cercles en M et M'.

1° Montrer que OM et O'M' sont parallèles.

2° Évaluer le rapport $\frac{AM'}{AM}$ en fonction de R et R'.

53. Deux cercles de centres O et O' et de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A. Soit BC un diamètre du cercle O, AB et AC recoupent le cercle O' en B' et C'.

1° Montrer que B' et C' sont diamétralement opposés et comparer les directions de BC et B'C'.

2° Montrer que OO', BC' et B'C sont concourantes en un point I. Évaluer en fonction de R et R' le rapport $\frac{IO'}{IO}$.

54. Deux cercles se coupent en A et A'. On mène par A' trois sécantes BC, DE et FG qui coupent le premier cercle en B, D et F et le second en C, E et G.

1° Comparer les triangles ABC et ADE. Montrer que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$.

2° Comparer les triangles ABD et ACE.

3° Comparer les angles BDF et CEG puis les triangles BDF et CEG.

55. Soient un cercle de centre O, une corde AB de ce cercle et un point C du petit arc AB. La médiatrice de AC coupe la perpendiculaire en A à AB au point D. La médiatrice de BC coupe la perpendiculaire en B à AB au point E. Quel est le point de rencontre de ces médiatrices?

1° Comparer les angles OCD, OAD, OBE, OCE.

2° Comparer les angles CDO, CAB, COE.

3° Que peut-on dire des triangles COD et CEO? En déduire la relation : $\overline{CO}^2 = CE.CD$. *(B.E.P.C.)*

56. On mène aux extrémités A et B du segment AB les perpendiculaires Ax et By d'un même côté de AB. Soit C un point de AB. On porte sur Ax et By deux segments variables AM et BN tels que AM.BN = AC.CB.

1° Comparer les triangles MAC et CBN.

2° Quelle est la valeur de l'angle MCN et quelle est la ligne décrite par le centre du cercle CMN?

3° Soit CP la hauteur issue de C du triangle MCN. Comparer les triangles APB et MCN. Montrer que le point P décrit un demi-cercle de diamètre AB.

57. Dans un triangle ABC on mène la bissectrice intérieure de l'angle A qui coupe BC en D et le cercle circonscrit au triangle en I.

1° Comparer les triangles ABD et AIC, puis les triangles ACD et AIB.

2° Démontrer la relation AB.AC = AD.AI.

3° Reprendre le problème avec la bissectrice extérieure de l'angle A.

58. Soit un triangle ABC dans lequel on mène les hauteurs AD, BE et CF. On désigne par H l'orthocentre du triangle.

1° Comparer les triangles ADC et BDH et démontrer la relation DA.DH = BD.DC. Écrire deux autres relations analogues.

2° Comparer les triangles ADB et AFH ainsi que les triangles ADC et AEH.

3° Démontrer que : AD.AH = AB.AF = AC.AE. Écrire d'autres relations analogues.

59. On considère un carré ABOC et l'on trace à son intérieur un arc de cercle de centre O, de rayon égal au côté du carré et limité aux sommets B et C. D'un point M de cet arc, on abaisse les perpendiculaires MF, ME, MD respectivement sur les côtés AB, AC et la diagonale BC du carré.

1° Évaluer les angles DME et DMF.

2° Montrer que les quatre points B, D, M, F d'une part, C, D, M, E d'autre part, sont situés sur un même cercle.

3° Comparer les angles MED, MCB, MBA et MDF.

4° Démontrer la relation : $\overline{MD}^2 = ME.MF$. *(B.E.P.C.)*

APPLICATIONS DE LA SIMILITUDE

32. Utilité des cas de similitude. — Lorsque deux triangles ABC et DEF sont semblables (fig. 29), nous avons entre les différents éléments les relations :

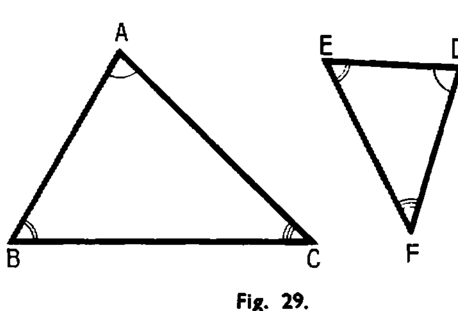


Fig. 29.

$$\widehat{A} = \widehat{D}, \quad \widehat{B} = \widehat{E}, \quad \widehat{C} = \widehat{F}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Notons qu'il faut toujours énoncer dans le même ordre les sommets homologues de deux triangles semblables.

Il est d'ailleurs commode d'écrire $\left\{ \begin{matrix} ABC \\ DEF \end{matrix} \right.$. Les sommets et les côtés homologues se correspondent ainsi verticalement.

Les cas de similtiude ne font intervenir que deux des relations précédemment écrites. Les autres en sont donc des conséquences et permettent ainsi de découvrir de nouvelles relations entre les éléments de deux figures données.

33. Exemple. — *Soit un triangle* ABC; *on mène la hauteur* AH *et le diamètre* AD *du cercle circonscrit. Démontrer la relation* AB.AC = AD.AH.

Considérons les triangles AHB et ACD (fig. 30). Ils ont :

1° $\widehat{H} = \widehat{C} = 1^D$ car l'angle C est inscrit dans un demi-cercle.

2° $\widehat{B} = \widehat{D}$ car ce sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc AC.

Les deux triangles AHB et ACD sont donc semblables (1er cas). Il en résulte que :

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD}.$$

Soit finalement : AB.AC = AD.AH.

En posant AC = b, AB = c, AD = 2 R et AH = h_a. Cette relation s'écrit :

$$\boxed{bc = 2\,R\,h_a}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème :

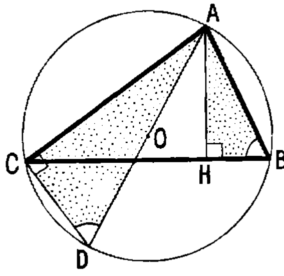


Fig. 30.

34. Théorème. — ***Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur relative au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit au triangle.***

En particulier, si le triangle est rectangle, le diamètre du cercle circonscrit est égal à l'hypoténuse, d'où :

Le produit des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur issue du sommet de l'angle droit.

35. Hauteurs homologues de deux triangles semblables.

Le rapport des deux hauteurs homologues de deux triangles semblables est égal au rapport de similitude.

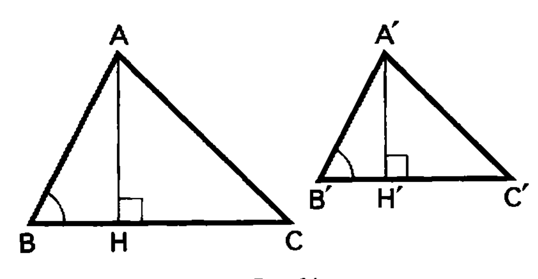


Fig. 31

Soient ABC et A'B'C' deux triangles semblables (fig. 31).

Menons les hauteurs homologues AH et A'H' et comparons les triangles A'H'B' et AHB.

1° $\widehat{H'} = \widehat{H} = 1^D$.

2° $\widehat{B'} = \widehat{B}$ (angles homologues des deux triangles A'B'C' et ABC).

Les deux triangles A'H'B' et AHB sont semblables d'après le 1er cas de similitude.

Nous en concluons : $\dfrac{A'H'}{AH} = \dfrac{A'B'}{AB} = k$ (*rapport de similitude*).

36. Périmètre de deux triangles semblables.

Le rapport des périmètres de deux triangles semblables est égal au rapport de similitude.

Considérons les deux triangles semblables ABC et A'B'C' (fig. 31). D'après les propriétés des rapports égaux :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B' + B'C' + C'A'}{AB + BC + CA} = k.$$

Soit :
$$\frac{\textit{Périmètre}\ A'B'C'}{\textit{Périmètre}\ ABC} = \frac{A'B'}{AB} = k.$$

37. Points qui divisent un segment dans un rapport donné. — Nous avons déjà étudié cette construction au n° 18. La construction suivante est plus simple, car elle ne nécessite qu'une seule construction de parallèle.

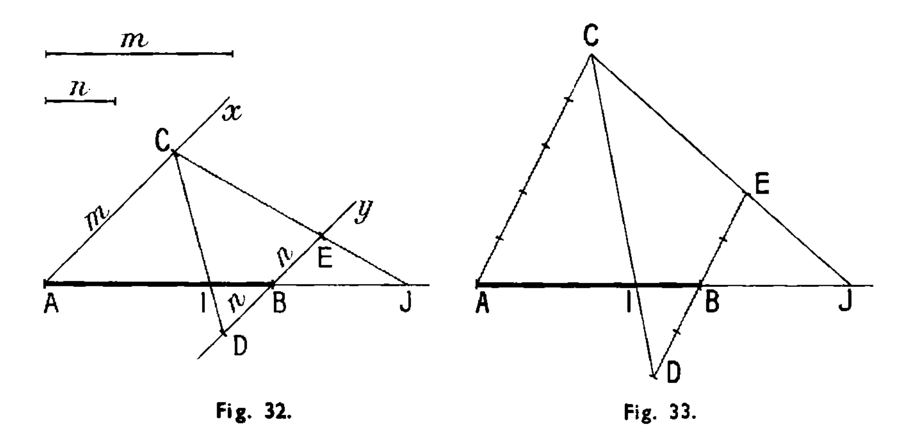


Fig. 32. Fig. 33.

Menons par A une droite Ax et par B la parallèle By à cette droite (fig. 32). Portons sur Ax le segment AC $= m$ et sur By les segments BD $=$ BE $= n$. La droite CD coupe AB en I et CE la coupe en J.

Les deux triangles IAC et IBD sont semblables ainsi que les triangles JAC et JBE (n° 21). D'où :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{AC}{BD} = \frac{m}{n} \quad \text{et} \quad \frac{JA}{JB} = \frac{AC}{BE} = \frac{m}{n}.$$

Remarque. — Si le rapport $\frac{m}{n}$ est un rapport numérique, $\frac{5}{2}$ par exemple (fig. 33), il suffit de porter AC $=$ 5 fois un segment donné et BE $=$ BD $=$ 2 fois ce même segment.

EXERCICES

60. Soit un triangle isocèle OAB de base AB. Une sécante issue de O coupe la base AB (ou son prolongement) en D et le cercle circonscrit au triangle OAB en E.

1° Comparer les triangles OAE et ODA.

2° Démontrer la relation : $\overline{OA}^2 = \overline{OD}.\overline{OE}$.

61. Dans un triangle ABC, les hauteurs AD, BE et CF se coupent en H.

1° Comparer les triangles AHE et BHD puis les triangles BHF et CHE.

2° Démontrer les relations : HA.HD = HB.HE = HC.HF.

62. Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle O. On mène par le point B la parallèle à la tangente au cercle au point A. Cette parallèle coupe AC en D.

1° Comparer les triangles ABC et ADB.

2° Démontrer la relation : $\overline{AB}^2 = AC.AD$.

63. D'un point P extérieur à un cercle O, on mène les tangentes PA et PB. Puis d'un point M du cercle on mène les perpendiculaires MI, MH et MK aux droites AB, PA et PB.

1° Comparer les triangles MAI et MBK puis MBI et MAH.

2° Démontrer la relation : $\overline{MI}^2 = MH.MK$.

64. Dans un triangle rectangle ABC on mène une perpendiculaire en D à l'hypoténuse BC. Cette perpendiculaire coupe AC en E et AB en F.

1° Comparer les triangles BDF et EDC.

2° Montrer que BD.DC = DE.DF.

65. On mène la hauteur AH d'un triangle rectangle ABC. Le cercle de diamètre AH coupe AB en D et AC en E.

1° Quelle est la nature du quadrilatère ADHE?

2° Comparer les triangles ABC et ADE. En déduire la relation AB.AD = AC.AE.

3° Montrer que le quadrilatère BDEC est inscriptible.

66. On considère dans un cercle une corde BC et la tangente en un point A qui coupe le prolongement de BC en M.

1° Comparer les triangles MAB et MCA. Conséquences?

2° En déduire les relations : $\overline{MA}^2 = \overline{MB}.\overline{MC}$ et $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

67. Soit un triangle équilatéral ABC et M un point de l'arc ACB du cercle circonscrit au triangle. MA coupe BC en D et MB coupe CA en E.

1° Comparer les angles ADB et ABE, puis les triangles ABD et EAB.

2° Démontrer la relation : $AE.BD = \overline{AB}^2$.

68. On mène par un point M d'un demi-cercle O, de diamètre AB, une tangente qui coupe en C et D les perpendiculaires Ax et By à ce diamètre.

1° Quelle est la valeur de l'angle COD?

2° Comparer les triangles OAC et ODB et démontrer la relation : $\overline{OA}^2 = \overline{AC}.\overline{BD}$.

69. On considère un quadrilatère ABCD dont les diagonales se coupent en O. On mène par B la parallèle à AD et par A la parallèle à BC. Ces parallèles coupent les diagonales AC et BD en E et F respectivement.

1° Démontrer que $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OC}.\overline{OF} = \overline{OE}.\overline{OD}$.

2° Montrer que CD et EF sont parallèles.

70. On donne dans un plan trois points en ligne droite A, I, B placés dans cet ordre. AI mesure 4 cm et IB = 5 cm. On désigne par M un point quelconque du plan et on trace MA, MI, MB.

1° Montrer que, si les triangles AMI et ABM sont semblables, le point M est sur un cercle fixe (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

2° Inversement, lorsque le point M est sur le cercle (C), les triangles AMI et ABM sont-ils semblables?

3° Que vaut le rapport $\frac{MB}{MI}$ lorsque M décrit le cercle C ?

4° Construire les points P et Q du cercle (C) tels que les angles APB et AQB soient droits. Comparer les triangles IAP et IPB. En déduire la longueur IP.

(B.E.P.C.)

71. 1° Étant donné un triangle isocèle ABC (AB = AC), montrer qu'il est possible de tracer un cercle de centre O tangent en B et C aux côtés AB et AC de ce triangle. Justifier très brièvement la construction. Comment se place le centre O par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC?

2° Soit S un point du cercle de centre O, choisi sur l'arc BC plus petit qu'un demi-cercle; les droites BS et CS coupent la bissectrice extérieure de l'angle A du triangle ABC, respectivement en M et P. Montrer que les angles MSP et MAB sont égaux.

3° Comparer le triangle SMP au triangle AMB; puis au triangle ACP. En déduire que : $AP.AM = \overline{AB}^2$.

(B. E. P. C.)

72. Deux cercles (O) et (O') de centres O et O' sont tangents extérieurement en A. On mène la tangente commune intérieure et une tangente commune extérieure BC. Ces deux droites se coupent en M.

1° Montrer que MA = MB = MC et en déduire la nature du triangle ABC.

2° On prolonge la droite BA, qui coupe le cercle (O') en D, et la droite CA, qui coupe le cercle (O) en E. Montrer que BE et CD sont respectivement les diamètres des cercles (O) et (O'). Préciser la nature du quadrilatère BCDE.

3° Comparer les deux triangles BCD et BCE. Établir la relation $\overline{BC}^2 = BE \times CD$. Calculer, lorsque les rayons des cercles (O) et (O') sont respectivement OA = 4,5 cm et O'A = 2 cm, la mesure du côté BC du quadrilatère BCDE.

(B.E.P.C.)

73. On donne sur une droite (D) trois points A, C, B placés dans cet ordre. AC = 2 cm, CB = 4 cm. On donne également un angle aigu x.

1° Construire du même côté de (D), les deux triangles isocèles AIC et CJB dont les angles aux sommets AIC et CJB sont égaux à $2x$, puis les cercles de centres I et J passant par C. Comparer les triangles AIC et CJB.

2° Joindre aux points A, B, C le point M commun aux deux cercles autre que C. Calculer le rapport $\frac{MA}{MB}$.

3° On trace la tangente commune aux deux cercles qui touche le premier en T, le second en U. La droite IJ coupe la droite (D) en S et la droite TU en S'. Calculer les valeurs de $\frac{SJ}{SI}$ et $\frac{S'J}{S'I}$. Conclusion.

(B. E. P. C.)

74. Soit un triangle isocèle ABC de base BC. Sur la bissectrice extérieure $x'x$ de l'angle A se déplacent deux points M et N situés de part et d'autre de A, tels que : AM.AN = AB.AC. Les droites BM et CN se coupent en P.

1° Démontrer que les triangles ABM, ANC et PNM sont semblables.

2° Calculer l'angle MPN en fonction de l'angle ABC = α.

3° Montrer que lorsque M décrit la droite $x'x$ le point P décrit le cercle tangent en B à AB et en C à AC.

(B.E.P.C.).

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

38. Projection d'un point, d'un segment. — Considérons une droite *xy* (fig. 34) et menons par un point M la perpendiculaire à *xy*. *Le pied* M′ *de cette perpendiculaire s'appelle projection de* M *sur xy.*

La droite MM′ est la *projetante* du point M. Notons que tout point de *xy* est confondu avec sa projection.

La projection d'un segment AB est le segment A′B′ formé par les projections sur *xy* de chacun de ses points. De même C′D′ est la projection de CD sur *xy*.

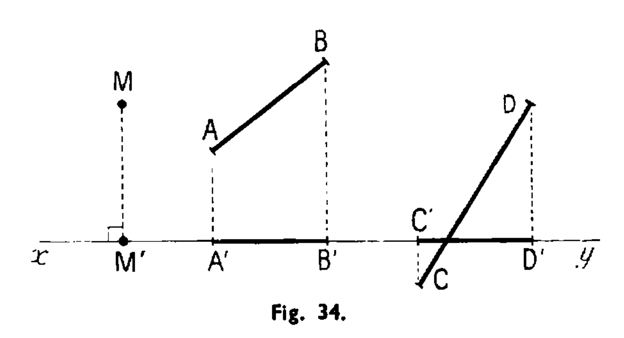


Fig. 34.

39. Relation métrique. — On appelle relation métrique toute relation entre des mesures de longueurs. La relation du n° 33 : $bc = 2\,\mathrm{R}h_a$ est une relation métrique entre deux côtés d'un triangle, la hauteur relative au troisième côté et le diamètre du cercle circonscrit au triangle.

Rappelons que si : $\dfrac{\mathrm{AB}}{\overline{\mathrm{CD}}} = \dfrac{\mathrm{EF}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ ou $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \mathrm{CD.EF}$, on dit que :

***Le segment* AB *est moyen proportionnel entre* CD *et* EF.**

40. Lemme. — ***La hauteur* AH *d'un triangle rectangle* ABC *détermine deux triangles* HBA *et* HAC *semblables au triangle* ABC *et semblables entre eux.***

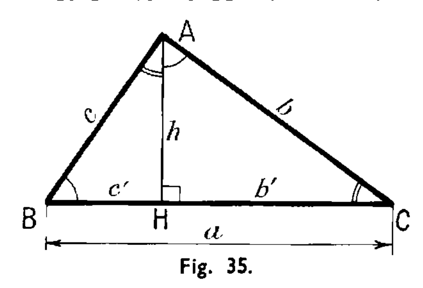


Fig. 35.

En effet (fig. 35) les triangles HBA et ABC sont rectangles et ont l'angle aigu B commun, ils sont semblables (nº 30). De même les tiangles HAC et ABC ont l'angle C commun, ils sont semblables. Par suite les triangles HBA et HAC semblables à ABC sont semblables entre eux.

41. Théorème I. — ***Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.***

De la similitude des triangles $\left\{\begin{matrix}\text{ABC}\\ \text{HBA}\end{matrix}\right.$ il résulte que : $\dfrac{\text{AB}}{\text{HB}} = \dfrac{\text{BC}}{\text{BA}}$.

D'où $\overline{\text{AB}}^2 = \text{BC.HB}$.

et de même : $\overline{\text{AC}}^2 = \text{CB.CH}$.

Si on suppose BC orienté, on obtient les relations

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{BC}}.\overline{\text{BH}} \quad \text{et} \quad \overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{BC}}.\overline{\text{HC}}. \qquad (1)$$

Remarque. — En posant :

BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, AH $= h$, BH $= c'$ et CH $= b'$.

On obtient: $\boxed{b^2 = ab'}$ et $\boxed{c^2 = ac'}$

42. Théorème II (de Pythagore). — ***Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.***

Ajoutons membre à membre les deux relations (1) précédentes. Nous obtenons :

$$\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{BC}}.\overline{\text{BH}} + \overline{\text{BC}}.\overline{\text{HC}} = \overline{\text{BC}}.\left(\overline{\text{BH}} + \overline{\text{HC}}\right) = \overline{\text{BC}}^2.$$

Soit : $\overline{\text{BC}}^2 = \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{AC}}^2$ ou $\boxed{a^2 = b^2 + c^2.}$ (2)

Cette relation permet de calculer l'un des trois côtés d'un triangle rectangle quand on connaît les deux autres.

43. Théorème III. — ***Dans tout triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.***

De la similitude des triangles $\left\{\begin{array}{l}\text{HBA}\\ \text{HAC}\end{array}\right.$ il résulte que : $\dfrac{\text{HB}}{\text{HA}} = \dfrac{\text{HA}}{\text{HC}}$.

Donc : $\overline{\text{HA}}^2 = \text{HB.HC}$ ou $\boxed{h^2 = b'.c'}$

Si la droite BC est orientée, il faut écrire : $\overline{\text{AH}}^2 = \overline{\text{BH}}.\overline{\text{HC}}$. (3)

44. Théorème IV. — ***Dans tout triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur.***

La similitude des triangles $\left\{\begin{array}{l}\text{ABC}\\ \text{HBA}\end{array}\right.$ donne : $\dfrac{\text{AC}}{\text{HA}} = \dfrac{\text{BC}}{\text{BA}}$.

Donc : $\text{AB.AC} = \text{BC.AH}$ ou $\boxed{bc = ah.}$ (4)

Observons que cette relation n'est autre que la relation : $bc = 2\,\text{R}\,h_a$ (n° 33) car dans un triangle rectangle en A, on a : $a = 2\,\text{R}$.

45. Corollaire I. — ***Le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport de leurs projections sur l'hypoténuse.***

En divisant membre à membre les relations (1) on obtient :

$$\frac{\overline{\text{AB}}^2}{\overline{\text{AC}}^2} = \frac{\overline{\text{BH}}}{\overline{\text{HC}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}} \qquad (5)$$

46. Corollaire II. — ***L'inverse du carré de la hauteur est égal à la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit.***

La relation (4) compte tenu de la relation (2) s'écrit :

$b^2c^2 = a^2h^2$ ou $b^2c^2 = h^2(c^2 + b^2)$ soit : $b^2c^2 = h^2c^2 + h^2b^2$.

En divisant les deux membres par $h^2b^2c^2$ on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\overline{\text{AH}}^2} = \frac{1}{\overline{\text{AB}}^2} + \frac{1}{\overline{\text{AC}}^2} \qquad (6)$$

47. Réciproque du théorème de Pythagore. — ***Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, ce triangle est rectangle.***

Soit un triangle ABC tel que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ (fig. 36). Construisons un triangle A'B'C' rectangle en A' tel que A'B' = AB et A'C' = AC. D'après le théorème direct :

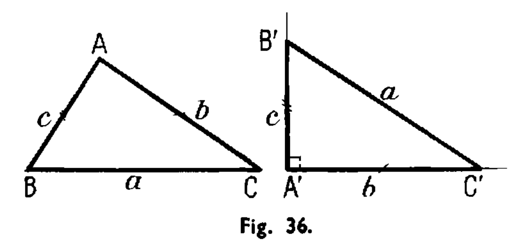


Fig. 36.

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A'C'}^2$$
$$= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

Donc B'C' = BC. Les deux triangles A'B'C' et ABC, ayant les trois côtés respectivement égaux, sont égaux (3e cas) et le triangle ABC est rectangle en A.

REMARQUE. — Il résulte de la démonstration précédente que lorsque trois nombres a, b, c vérifient la relation $a^2 = b^2 + c^2$, il existe un triangle rectangle d'hypoténuse a et de côtés b et c.

Exemples : $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ $(25 = 16 + 9)$.
$a = 13$, $b = 12$, $c = 5$ $(169 = 144 + 25)$.

48. Applications. — 1° Diagonale d'un rectangle. — Soit ABCD un

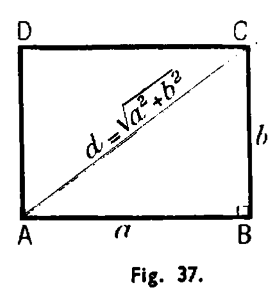


Fig. 37.

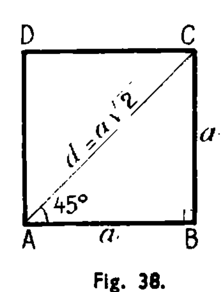


Fig. 38.

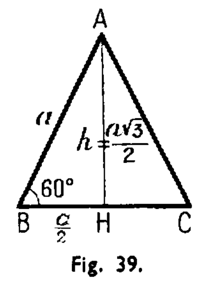


Fig. 39.

rectangle de côtés AB = a et BC = b (fig. 37). Dans le triangle rectangle ABC on a :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \implies d^2 = a^2 + b^2.$$

Donc : $\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2}.}$

2° Diagonale d'un carré. — Si ABCD est un carré de côté a (fig. 38) on obtient : $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Soit : $\boxed{d = a\sqrt{2}}$ ($\sqrt{2} = 1{,}414..$)

Notons que cette formule donne *l'hypoténuse* AC *d'un triangle rectangle isocèle* ABC *de côtés* AB = BC = *a*.

3° Hauteur d'un triangle équilatéral. — Soit ABC un triangle équilatéral de côté a (fig. 39) et soit AH = h la hauteur issue de A. On a :

$$BH = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

D'où : $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$. Soit : $\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$ ($\sqrt{3} = 1{,}732...$).

EXERCICES

75. Dans un triangle ABC rectangle en A on a : AB = 65 mm, et AC = 156 mm. Calculer l'hypoténuse BC, la hauteur AH et les segments BH et HC.

76. Dans un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH on donne : AB = 15 cm, et AH = 12 cm; calculer BH, BC et AC.

77. Dans un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH, on donne : a = 55 cm, b = 44 cm. Calculer les segments AB, BH, CH et AH.

78. Dans un triangle ABC, rectangle en A et de hauteur AH, on donne : BC = 36 cm BH = 4 cm. Calculer CH, AB, AC et AH.

79. Dans un triangle ABC, rectangle en A, et de hauteur AH, on donne : BH = 72 cm, CH = 12,5 cm. Calculer BC, AH, AB et AC.

80. Soit un cercle de centre O et de diamètre AB = 84,5 cm. On trace une corde AC = 32,5 cm; on joint CB et on désigne par H la projection de C sur AB. Calculer les segments BC, AH, BH, CH et OH.

81. Soit un cercle de diamètre AB = 35 cm. Une corde PQ perpendiculaire en H à AB est située à une distance du centre égale à 49 mm. Calculer les segments AP, BP et PH.

82. Dans un trapèze isocèle les bases mesurent 42 cm et 30 cm. La hauteur mesure 8 cm. Calculer la longueur des côtés non parallèles.

83. Soit un cercle O de diamètre AB = 2 R. On mène les tangentes en A et B; la tangente en un point M du cercle les coupe respectivement en C et D.

1° Démontrer que le triangle COD est rectangle.

2° Démontrer la relation : $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = R^2$.

84. Soit un triangle ABC tel que $\hat{B} - \hat{C} = 90°$.

1° Démontrer que le diamètre AA' = 2 R du cercle circonscrit est parallèle à BC.

2° Démontrer la relation : $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4R^2$.

3° Soit AH la hauteur issue de A. Démontrer que : $\overline{AH}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$.

85. Soit un triangle ABC dont les côtés BC, CA et AB mesurent 5, 4 et 3 cm.

1° Montrer que ce triangle est rectangle en A.

2° Calculer les longueurs des segments déterminés sur les côtés par les points de contact du cercle inscrit au triangle.

3° Calculer le rayon du cercle inscrit et celui du cercle exinscrit dans l'angle A.

86. Soit un triangle ABC rectangle en A. On mène en un point D de BC la perpendiculaire à BC qui coupe les droites AB en E et AC en F.

1° Démontrer la relation : DB.DC = DE.DF.

2° Soit M le point de DE tel que $\overline{DM}^2$ = DE.DF. Trouver la ligne décrite par le point M quand D décrit l'hypoténuse BC.

87. On donne un cercle de rayon R et un point P intérieur. On mène par P deux cordes AB et CD perpendiculaires, puis la corde DE parallèle à AB.

1° Comparer BD et AE et évaluer l'angle CAE.

2° Calculer à partir de R la somme $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$.

88. Soit un trapèze rectangle ABCD où BC est le côté oblique et dont les bases sont AB et CD. L'angle C vaut 30° et la diagonale BD est perpendiculaire à BC.

1° Calculer les angles du trapèze.

2° Calculer les bases, la hauteur et les diagonales en fonction de BC = a.

89. Dans un triangle ABC on donne AB = c; AC = b et A = 30°. Calculer BC en fonction de c et b.

90. Dans un triangle ABC on donne AB = c; AC = b et A = 45°. Calculer BC en fonction de c et b.

91. Soit un carré ABCD de côté a. Sur les quatre côtés à partir des sommets et dans le même sens, on construit les segments : AM = BN = CP = DQ. Les droites AN, BP, CQ, DM se coupent en quatre points A', B', C', D'.

1° Montrer que A'B'C'D' est un carré.

2° Calculer son côté en fonction de a sachant que AM = $\frac{a}{2}$.

3° Si M décrit le segment AB, quelle ligne décrit le point B'?

92. Soit un trapèze rectangle ABCD de bases AB et CD et de hauteur AD. On donne AB = a et CD = AD = 2 a.

1° Soit I le milieu de AD. Démontrer que BCI est isocèle. Calculer ses côtés.

2° Soit O l'intersection de BI et AC. Calculer le rapport $\frac{AO}{OC}$.

93. Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle O et dont les angles sont aigus. On donne $\widehat{AOB}$ = 90° et $\widehat{AOC}$ = 120°.

1° Montrer que le centre O est intérieur au triangle ABC.

2° Calculer les angles du triangle ABC.

3° Calculer en fonction du rayon R la hauteur AH, et le côté BC.

94. Soit un triangle isocèle ABC dont la base BC mesure 6 cm et la hauteur AH = 4 cm. On trace le cercle de centre O, circonscrit à ce triangle.

1° Calculer la longueur des côtés égaux AB et AC ainsi que la longueur du diamètre AA' du cercle ABC.

2° Soit B' le point diamétralement opposé à B sur le cercle (O). On abaisse de A la perpendiculaire sur CB', soit AL. Quelle est la nature du quadrilatère AHCL?

3° On mène AK perpendiculaire à BB'. Comparer les triangles BKA et CLA. En déduire que AK = AL.

4° Quelle est la nature du quadrilatère BHKA? En déduire que H, K, L sont alignés.

(B.E.P.C.)

95. 1° Construire un triangle AOO′ rectangle en A tel que AO = 3 cm et AO′ = 4 cm. Les cercles de centres O et O′ passant par A se recoupent en un deuxième point B. Calculer les diagonales du quadrilatère AOBO′.

2° Une sécante variable passant par A recoupe les cercles précédents en C et D. Montrer que le triangle BCD reste semblable au triangle BOO′.

3° Construire les milieux E et F de BC et BD ainsi que le centre I du cercle circonscrit au triangle BCD. Nature du quadrilatère BEIF ? Sur quelle courbe se déplace le point I lorsque la sécante BC pivote autour de A ? *(B.E.P.C.)*

96. 1° Soit AH la hauteur du triangle rectangle ABC. Montrer que :

$$AH.BC = AB.AC \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\overline{AH}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} \quad (2)$$

2° On considère un segment MN de longueur $2a$ de milieu O. On trace deux demi-axes Mx et Ny perpendiculaires à MN et de même sens. On prend un point I variable sur Mx, un point J variable sur Ny tels que OI et OJ soient perpendiculaires et on pose MI = x, NJ = y. Calculer les longueurs OI et OJ et montrer que : $xy = a^2$ (3).

3° En appliquant la relation (2) au triangle rectangle OIJ et en tenant compte de la relation (3), calculer la hauteur OH du triangle OIJ. En déduire la courbe décrite par le point H. Puis calculer la longueur IJ. *(B.E.P.C.)*

97. Dans un cercle de centre O et de rayon R on mène deux diamètres rectangulaires AB et CD. Une corde issue de A coupe le segment CD en P et le cercle en M.

1° Quelle est la valeur de l'angle AMB? En conclure que le quadrilatère OPMB est inscriptible dans un cercle dont on précisera la position du centre I. Comment varie le point I lorsque le point P décrit le segment CD?

2° Démontrer que les triangles ABM et AOP sont semblables et en déduire la valeur du produit AP.AM en fonction de R.

3° On suppose que l'angle BAM = 30°. Calculer les segments BM, AM, OP et AP en fonction de R. *(B.E.P.C.)*

98. Soit BC un diamètre d'un cercle de centre O et de rayon R. On marque sur ce cercle le point D tel que l'arc BD = 120°. La perpendiculaire DI à BC recoupe le cercle en E. Les droites BD et EC se coupent en A.

1° Montrer que DO est bissectrice de l'angle BDE, que DO et AC sont parallèles et que D est le milieu de AB.

2° Calculer en fonction de R les segments BD, DC, OI, AB et AC.

3° Construire le cercle circonscrit au triangle ABC. Préciser la position de son centre O′. Calculer son rayon en fonction de R ainsi que les angles AO′B et AO′C. *(B.E.P.C.)*

99. Sur une droite, nous prenons trois points dans cet ordre : A, H, B tels que AH = 4,5 cm et HB = 8 cm. Nous menons une demi-droite Hx perpendiculaire à la droite AB.

1° Quelle doit être la position du point C sur la demi-droite Hx pour que AC soit tangent au cercle (O), circonscrit au triangle HBC?

2° La position du point C étant ainsi définie, calculer les mesures des rayons des cercles de centre A tangents au cercle O.

3° Le point C conservant cette position, prenons le symétrique D, du point H par rapport à BC. Désignons par I le point de concours de DH et BC et par K la projection du point D sur la droite AB. Calculer la longueur des segments BI, DH et DK. *(B.E.P.C.)*

RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

49. Propriété fondamentale. — Considérons (fig. 40) un angle aigu xOz égal à α. Soit M un point quelconque de Oz et P sa projection sur Ox. Le triangle rectangle OPM reste semblable à lui-même lorsque M parcourt Oz. Donc :

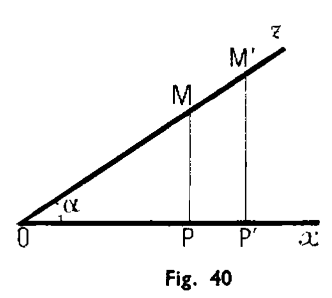


Fig. 40

$$\left\{ \begin{matrix} \text{OPM} \\ \text{OP'M'} \end{matrix} \right. \quad \frac{OP}{OP'} = \frac{PM}{P'M'} = \frac{OM}{OM'},$$

On en déduit les trois proportions :

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'}; \quad \frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'}$$

et
$$\frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}.$$

Le rapport de deux côtés du triangle OPM est donc indépendant de la position du point M et reste constant lorsque M parcourt Oz.

Inversement si on connaît la valeur de l'un de ces rapports on pourra construire un triangle O'P'M' semblable à OPM et par suite construire l'angle α.

50. Rapports trigonométriques d'un angle aigu. — ***Les trois rapports*** $\frac{OP}{OM}$, $\frac{PM}{OM}$ ***et*** $\frac{PM}{OP}$, ***indépendants du point*** M, ***caractérisent l'angle aigu*** α. ***On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu*** α.

On aurait pu envisager aussi les inverses de ces trois rapports. Pratiquement on n'utilise que l'inverse du dernier qui se nomme ***cotangente de l'angle*** α.

On écrit en abrégé (lire « cosinus α, sinus α, tangente α et cotangente α ») :

$\cos \alpha = \frac{OP}{OM}$	$\sin \alpha = \frac{PM}{OM}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PM}{OP}$	$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Sin α, cos α, tg α et cotg α constituent les rapports trigonométriques de l'angle α.

51. Interprétation géométrique. — Désignons par A et M les intersections de Ox et Oz avec le cercle de centre O et de rayon 1 (fig. 41), et par T l'intersection de la tangente en A et de Oz. Il en résulte, puisque $OA = OM = 1$, que :

$$\sin \alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{1}$$

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1}$$

et
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1},$$

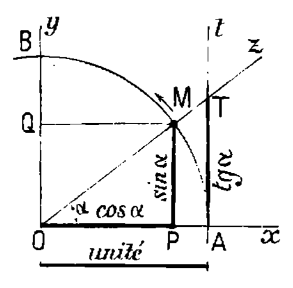


Fig. 41.

Soit :

$\sin \alpha = PM$	$\cos \alpha = OP$	$\operatorname{tg} \alpha = AT.$

Remarquons que l'arc AM intercepté par l'angle xOz a pour mesure α. C'est pourquoi on parle indifféremment des rapports trigonométriques d'un angle ou d'un arc. D'autre part, si on désigne par Q la projection de M sur Oy on a : $\sin \alpha = OQ$.

Remarque importante. — Il faut éviter de supposer ici que sin α, cos α, tg α sont des segments. Il faut au contraire dans la formule $\cos \alpha = OP$ supposer que OP représente la mesure du segment OP, c'est-à-dire le *rapport du segment* OP *au segment unité* OA *ou* OM.

52. Variations des rapports trigonométriques. — Si α varie de 0 à 90° (fig. 41), le point M décrit le quart de cercle AB. Il est visible que :

P décrit le segment AO. Donc cos α décroît de + 1 à 0.

Q décrit le segment OB, donc sin α croît de 0 à + 1.

T décrit la demi-droite At, donc tgα croît de 0 à + ∞ et son inverse cotg α décroît de + ∞ à 0.

Noter que le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont compris entre 0 et 1.

53. Relations entre les rapports trigonométriques de l'angle α.

Les rapports trigonométriques de l'angle α sont liés par les trois relations :

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$	$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	(1) (2) (3)

1° Considérons le triangle OPM (fig. 41). D'après la relation de Pythagore :

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2.$$

Or $\quad OP = \cos \alpha, \quad PM = OQ = \sin \alpha \quad$ et $\quad OM = 1.$

Donc : $\quad (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1.$

Par convention on écrit : $(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$ et on lit : « cosinus carré α » afin de ne pas confondre avec $\cos(\alpha^2)$ ou $\cos(2\,\alpha)$.

2° Les triangles OPM et OAT sont semblables : $\dfrac{OP}{OA} = \dfrac{PM}{AT}.$

Soit : $\quad \dfrac{\cos \alpha}{1} = \dfrac{\sin \alpha}{\text{tg}\,\alpha} \quad$ ou : $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$

3° La formule de définition : $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$ donne alors : $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$

54. Théorème. — ***Lorsque deux angles sont complémentaires :***

1° ***Le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.***

2° ***La tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.***

Soient $AOM = \alpha$ et $AOM' = \alpha'$ deux angles aigus complémentaires (fig. 42).

Les deux triangles rectangles OPM et M'P'O ont l'hypoténuse égale et leurs angles aigus respectivement égaux à α et à α'. Ils sont égaux et :

$$PM = OP' \qquad OP = P'M'.$$

Soit : $\quad \sin \alpha = \cos \alpha' \qquad \cos \alpha = \sin \alpha'.$

En faisant les rapports membre à membre de ces deux égalités on obtient :

$$\text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\,\alpha' \quad \text{ou} \quad \text{cotg}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha'.$$

Fig. 42.

55. Usage des tables de rapports trigonométriques.

Les tableaux des pages 282 et 283 fournissent les rapports trigonométriques des angles aigus, de degrés en degrés (page 282) ou de grades en grades (page 283).

Ces tables se lisent de haut en bas pour les angles inférieurs à 45° ou 50 grades, et de bas en haut pour les angles supérieurs à 45° ou 50 grades.

Leur emploi est immédiat pour les nombres figurant dans la table :

$$\text{tg } 38^\circ = 0{,}7813 \qquad \frac{1}{\cos 17^\circ} = 1{,}046 \qquad 0{,}8746 = \cos 29^\circ = \sin 61^\circ.$$

Pour les autres valeurs on procède par *interpolation* en admettant que :

Entre deux valeurs consécutives de la table, l'accroissement de l'angle et l'accroissement d'un rapport trigonométrique sont proportionnels.

Ces accroissements doivent être pris en valeur algébrique.

56. 1er Problème. — *Déterminer :* sin 32°25′ *et* cos 32°25′.

On lit dans la table : sin 32° = 0,5299; sin 33° = 0,5446.

Pour un accroissement de 1° = 60′, l'accroissement du sinus est (en dix millièmes) : D = 446 — 299 = 147. Pour 1′ cet accroissement serait $\frac{147}{60}$ et pour 25′ la correction est donc : $\frac{147 \times 25}{60} = 61{,}25$.

On arrondit à 61, ce qui donne : sin 32°25′ = 0,5299 + 0,0061 = 0,5360.

On opère de même pour le cosinus : seule différence, D est négatif ainsi que la correction.

DISPOSITION PRATIQUE :

sin 32° . . . . = 0,5299 D = 147	cos 32° . . . . = 0,8480 D = — 93
Pour 25′ : $\frac{147 \times 25}{60}$ = 61	Pour 25′ : $\frac{-93 \times 25}{60}$ = — 38
sin 32°25′ . . . . . = 0,5360	cos 32°25′ . . . . . . = 0,8442

57. 2e Problème. — *Déterminer* α *sachant que* tg α = 0,7456 et β *sachant que* $\frac{1}{\sin \beta} = 1{,}259$.

On lit dans la table : 0,7265 = tg 36°; 0,7536 = tg 37°.

Quand tg α s'accroît de D = 536 — 265 = 271, α s'accroît de 1° = 60′. Pour un accroissement d = 456 — 265 = 191 la correction pour α sera de $\frac{60' \times 191}{271} = 42'$.

D'où : α = 36°42′.

DISPOSITION PRATIQUE :

tg α = 0,7265 . . . . α = 36° D = 271	$\frac{1}{\sin \beta}$ = 1,269 . . . β = 52° D = — 17
Pour 191 : $\frac{60' \times 191}{271}$ = 42′	Pour — 10 : $\frac{60' \times 10}{17}$ = 35′
tg α = 0,7456. . . . . α = 36°42′	$\frac{1}{\sin \beta}$ = 1,259 . . . β = 52°35′

N.B. — Les calculs sont analogues lorsqu'on opère en grades (remplacer 60 par 10 pour les décigrades ou 100 pour les centigrades).

EXERCICES

100. Donner à l'aide de la table les rapports trigonométriques des angles suivants

25°	31°	43°	57°	81°	83°
15 gr	23 gr	31 gr	39 gr	57 gr	92 gr.

101. Donner à l'aide de la table, en faisant l'interpolation utile, les rapports trigonométriques des angles suivants :

12°30′	23°15′	43°12′	59°45′	75°23′
17,5 gr	32,25 gr	47,8 gr	79,75 gr	98,23 gr.

102. Soit x la valeur d'un angle aigu en degrés. Déterminer x sachant que :

$\sin x = 0{,}2079$	$\cos x = 0{,}9397$	$\operatorname{tg} x = 0{,}4452$
$\sin x = 0{,}7431$	$\cos x = 0{,}5878$	$\operatorname{tg} x = 1{,}1106$.

103. Soit x la valeur d'un angle aigu en grades. Déterminer x sachant que :

$\sin x = 0{,}3827$	$\cos x = 0{,}9969$	$\operatorname{tg} x = 0{,}2071$
$\sin x = 0{,}9178$	$\cos x = 0{,}6494$	$\operatorname{tg} x = 1{,}171$.

104. Déterminer l'angle aigu x tel que :

$\sin x = 0{,}48$	$\cos x = 0{,}1550$	$\operatorname{tg} x = 0{,}3$
$\sin x = 0{,}84$	$\cos x = 0{,}9515$	$\operatorname{tg} x = 1{,}5$.

105. Soit un quart de cercle de centre O, de rayon 1, limité par deux rayons OA et OB. Soit d'autre part M un point de l'arc AB. Désignons par A′ la projection de M sur OA et par B′ la projection de M sur OB. Le rayon OM coupe la tangente en A au point P et la tangente en B au point Q. La tangente en M coupe les droites OA et OB respectivement en C et D. Posons $\widehat{AOM} = \alpha$.

Évaluer en fonction des rapports trigonométriques de α les longueurs des segments suivants : OA′, OB′, AP, BQ, OC et OD.

106. Démontrer que : $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ et $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

En déduire la valeur de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$.

Application : $\operatorname{tg} x = \dfrac{12}{5}$. Calculer $\sin x$ et $\cos x$.

107. Soit un angle aigu xOy tel que $\sin xOy = \dfrac{3}{5}$.

a) Sans se servir des tables, calculer $\cos xOy$ et $\operatorname{tg} xOy$.

b) Construire géométriquement l'angle xOy. *(B.E.P.C.)*

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

58. Définition. — Les relations que l'on peut établir entre les mesures *a*, *b*, *c*, des côtés d'un triangle ABC et les rapports trigonométriques des angles A, B et C de ce triangle sont appelées « *relations trigonométriques* » dans le triangle ABC.

59. Théorème. — ***Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal :***

1° ***Au produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle adjacent à ce côté.***

2° ***Au produit du second côté de l'angle droit par la tangente de l'angle opposé ou par la cotangente de l'angle adjacent à ce côté.***

Soit un triangle ABC rectangle en A. en prolongeant BA jusqu'en x et BC jusqu'en z (fig. 43) on retrouve la figure 40 où les lettres B, A et C remplacent O, P et M. Donc (n° 50) :

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \qquad \cos B = \frac{AB}{BC},$$

$$\text{tg } B = \frac{AC}{AB} \qquad \text{cotg } B = \frac{AB}{AC}.$$

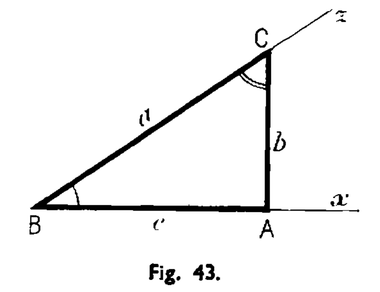


Fig. 43.

Soit :

$AC = BC \sin B$; $AB = BC \cos B$; $AC = AB \text{ tg } B$; $AB = AC \text{ cotg } B$.

Donc : $b = a \sin B$ $\quad c = a \cos B$ $\quad b = c \text{ tg } B$ $\quad c = b \text{ cotg } B$.

En permutant les lettres B et C d'une part et b et c d'autre part, on obtient :

$$c = a \sin C \qquad b = a \cos C \qquad c = b \text{ tg } C \qquad b = c \text{ cotg } C.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} b = a \sin B = a \cos C \\ \hline b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} c = a \sin C = a \cos B \\ \hline c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B \end{array}}$$

60. Remarques. — 1° Le théorème précédent permet de retrouver les définitions du n° 50. On voit ainsi que dans un triangle rectangle dont un des angles aigus est égal à α :

$\sin \alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$	$\cos \alpha = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$

2° D'autre part la comparaison des formules précédentes permet de retrouver le théorème relatif aux angles complémentaires (n° 54), car on en déduit :

$$\sin B = \cos C \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C.$$

61. Rapports trigonométriques des angles de 45°, 30° et 60°.

1° Soit un triangle rectangle isocèle ABC dans lequel AB = AC = a et A = 1^D (fig. 44). D'après le n° 48 on a B = C = 45°, BC = $a\sqrt{2}$ et par suite :

$$\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C = \frac{AC}{AB} = 1.$$

Donc : $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45° = 1.$

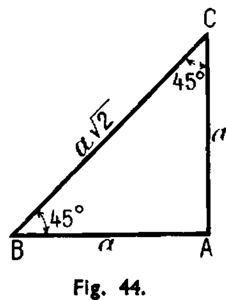


Fig. 44.

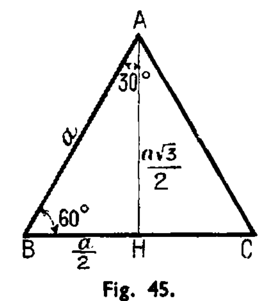


Fig. 45.

2° Soit un triangle équilatéral ABC de côté a (fig. 45). Dans le triangle rectangle AHB on a :

$$B = 60°, \ A = 30°, \ H = 90°, \ AB = a, \ BH = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \ (\text{n° } 48).$$

$$\sin B = \cos A = \frac{AH}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \text{Donc : } \sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos B = \sin A = \frac{BH}{AH} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}. \qquad \text{Donc : } \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C = \frac{AH}{BH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}. \qquad \text{Donc : } \operatorname{tg} 60° = \operatorname{cotg} 30° = \sqrt{3}.$$

et par suite cotg 60° = tg 30° $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. On peut donc dresser le tableau :

α	0	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α	0	30°	45°	60°	90°
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cotg α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Il est très utile de savoir ces valeurs ou de pouvoir les retrouver rapidement.

62. Construire un angle connaissant un de ses rapports trigonométriques. — On est ramené à construire un triangle rectangle OPM connaissant le rapport de deux de ses côtés.

1° *Construire l'angle dont le cosinus est* 3/5. Portons sur une demi-droite Ox

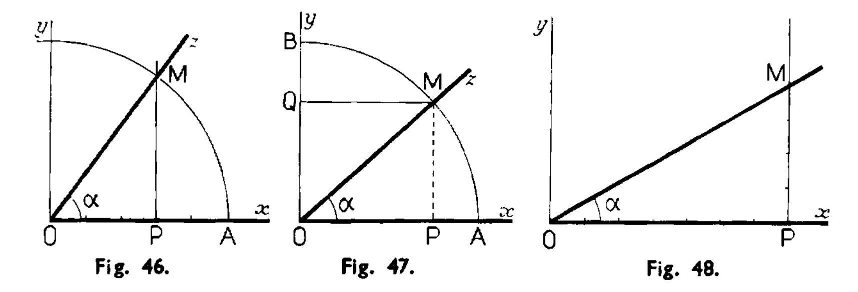


Fig. 46. Fig. 47. Fig. 48.

deux segments OP = 3 unités et OA = 5 unités (fig. 46). Le cercle de centre O et de rayon OA coupe la perpendiculaire en P à Ox en M. L'angle AOM = α est tel que cos $\alpha = \frac{\text{OP}}{\text{OM}} = \frac{3}{5}$.

2° *Construire l'angle aigu dont le sinus est* 0,65. Sur la demi-droite Oy perpendiculaire à Ox portons OB = OA = a et OQ = 0,65 a (fig. 47). Le cercle de centre O passant par A coupe, du côté de Ox, la perpendiculaire en Q à Oy en M. L'angle xOM = α est tel que sin $\alpha = \frac{\text{PM}}{\text{OM}} = \frac{\text{OQ}}{\text{OP}} = 0{,}65$.

3° *Construire l'angle dont la tangente est* $\frac{4}{7}$. Portons sur Ox le segment OP = 7 et sur la perpendiculaire en P à Ox le segment PM = 4 (fig. 48). L'angle xOM = α est tel que tg $\alpha = \frac{\text{PM}}{\text{OP}} = \frac{4}{7}$.

Connaissant la mesure d'un angle aigu, on peut donc à l'aide de la table déterminer sa tangente et construire cet angle, sans rapporteur.

63. Résolution d'un triangle rectangle. — Si dans un triangle rectangle on connaît deux éléments, dont une longueur au moins, on peut calculer les éléments inconnus. Cette opération est appelée *résolution du triangle.*

Exemple I. — *Dans un triangle* ABC *rectangle en* A, *on donne* AB = 5 cm *et l'angle* C = 33°. *Calculer* BC *et* CA (fig. 49).

1° $AB = 5 = BC \sin 33°$. Donc : $BC = \dfrac{5}{\sin 33°} = 5 \times 1{,}836 = \boxed{9{,}18 \text{ cm.}}$

2° $CA = AB \operatorname{cotg} 33° = 5 \text{ cm} \times 1{,}540 = \boxed{7{,}70 \text{ cm.}}$

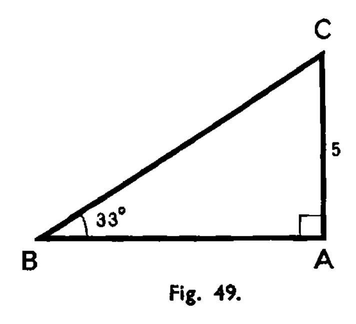


Fig. 49.

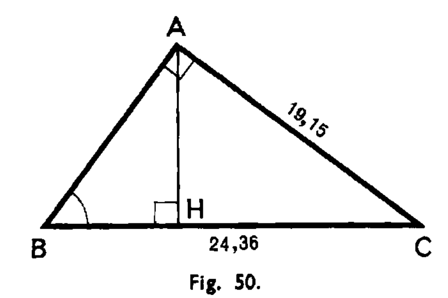


Fig. 50.

Exemple II. — *Calculer les angles* B *et* C, *le côté* AB *et la hauteur* AH *du triangle* ABC *rectangle en* A *sachant que* BC = 24,36 m *et* AC = 19,15 m (fig. 50).

1° $AC = BC \sin B \Longrightarrow \sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{19{,}15}{24{,}36} = 0{,}7861.$

D'où (page 283) : $B = 57{,}59$ gr et $C = 42{,}41$ gr.

2° $AB = BC \cos B = 24{,}36 \times 0{,}6179 = \boxed{15{,}06 \text{ m}}$

$AH = AB \sin B = 15{,}06 \times 0{,}7861 = \boxed{11{,}84 \text{ m}}$

64. Cas d'un triangle quelconque. — En menant l'une des hauteurs du triangle ABC, on détermine deux triangles rectangles dans lesquels on peut appliquer les relations du n° 60 et déterminer les éléments inconnus.

Exemple I. — *Dans le triangle* ABC *on connaît* BC = *a* = 60 m *et les angles* B = 65° *et* C = 43°. *Calculer* CA = *b et* AB = *c* (fig. 51).

1° $A + B + C = 180° \Longrightarrow A = 180° - (65° + 43°) \Longrightarrow A = 72°.$

2° Menons la hauteur CC'. Dans les triangles rectangles ACC' et BCC' on obtient :

$$CC' = b \sin A = a \sin B \Longrightarrow b = a \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{60 \times 0{,}9063}{0{,}9511} = \boxed{57{,}174 \text{ m}}$$

3° De même la hauteur BB' donne : $BB' = c \sin A = a \sin c$

d'où : $c = a \dfrac{\sin C}{\sin A} = \dfrac{60 \times 0{,}6820}{0{,}9511} = \boxed{43{,}024 \text{ m}}$

EXEMPLE II. — *Calculer le côté* BC *d'un triangle* ABC *sachant que* AB = 15 cm, AC = 20 cm *et l'angle* A = 60° (fig. 52).

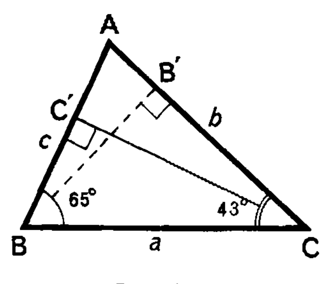


Fig. 51.

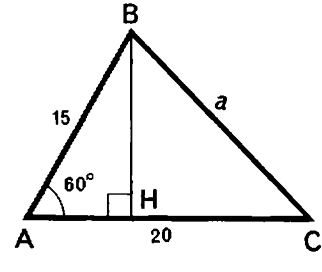


Fig. 52.

Menons la hauteur AH. Dans le triangle ABH rectangle en H :

$$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} \sin 60° = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7{,}5\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \mathrm{AH} = \mathrm{AB} \cos 60° = \frac{\mathrm{AB}}{2} = 7{,}5.$$

Dans le triangle rectangle BHC, on obtient CH = 20 — 7,5 = 12,5 et

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{BH}}^2 + \overline{\mathrm{HC}}^2 = (7{,}5)^2 \times 3 + (12{,}5)^2 = 325 \Longrightarrow \mathrm{BC} = \sqrt{325} = \boxed{18{,}028 \text{ cm.}}$$

EXEMPLE III. — *Calculer l'angle* A *du triangle* ABC *sachant que* $a = 6$, $b = 5$ *et* $c = 8$ (fig. 53).

Menons la hauteur CK. On obtient : $\mathrm{CK} = b \sin \mathrm{A}$ et $\mathrm{AK} = b \cos \mathrm{A}$

d'où : $\mathrm{KB} = c - b \cos \mathrm{A}$ et $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{KB}}^2 + \overline{\mathrm{KC}}^2 \Longrightarrow a^2 = (c - b \cos \mathrm{A})^2 + b^2 \sin \mathrm{A}$

d'où : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \mathrm{A} \Longrightarrow \cos \mathrm{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \dfrac{25 + 64 - 36}{80} = \dfrac{43}{8}$

Soit : $\cos \mathrm{A} = 0{,}5275 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{A} = 31°\,50'}$

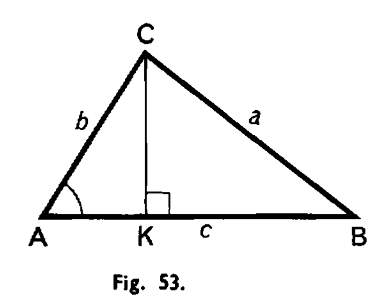


Fig. 53.

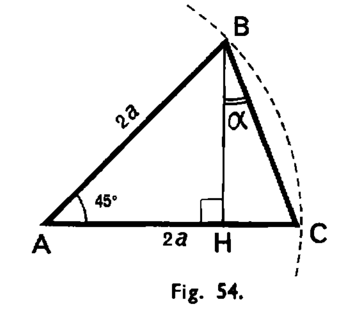


Fig. 54.

65. Problème. — *Dans un triangle isocèle* ABC *on donne* AB = AC = $2a$ *et l'angle* A = 45°. *On mène la hauteur* BH. *Calculer les segments* BH *et* HC *et en déduire* tg 22° 30′ *et* cotg 22° 30′ (fig. 54).

Le triangle ABH est rectangle isocèle et $\mathrm{AH} = \mathrm{BH} = 2\,a \sin 45° = a\sqrt{2}$, d'où : $\mathrm{HC} = 2\,a - a\sqrt{2} = a\,(2 - \sqrt{2})$. Dans le triangle ABC on a : $\mathrm{B} = \mathrm{C} = \frac{1}{2}\,(180° - 45°)$

d'où B = C = 67° 30′ et α = HBC = 22° 30′. Dans le triangle rectangle BHC

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{HC}{BH} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{a\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{BH}{HC} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{cotg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} + 1}$$

EXERCICES

108. Vérifier les relations $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ en donnant à x les valeurs suivantes : 30°, 45° et 60°.

109. Trouver le cosinus et la tangente d'un angle aigu dont le sinus vaut $\frac{1}{3}$.

110. Trouver le sinus et la tangente d'un angle aigu dont le cosinus est $\frac{2}{5}$.

— Résoudre un triangle ABC rectangle en A connaissant :

111. 1° $a = 15$; B = 27° 2° $a = 17$; B = 27 gr.

112. 1° $a = 23{,}5$; $b = 12{,}75$. 2° $a = 75$; $b = 47{,}5$ (B et C en gr).

— Construire les solutions des équations suivantes :

113. $10 \sin x - 3 = 0$. **114.** $5 \sin x - 4 = 0$, **115.** $7 \sin x - 3 = 0$.

116. $7 \cos x - 3 = 0$. **117.** $\cos x - 0{,}43 = 0$. **118.** $8 \cos x - 5 = 0$.

119. Soit un arbre matérialisé par un segment AB perpendiculaire en B à une horizontale xy. On se place en un point C de xy tel que BC = 50 m et on mesure l'angle ACB. Sachant que ACB = 19°, calculer la hauteur de l'arbre AB.

120. Un bâton planté verticalement sur un sol horizontal dépasse la surface du sol de 2 m. L'ombre portée par le bâton sur le sol mesure 5,5 m. Déterminer l'angle que forme la direction du soleil avec la verticale.

121. Soit un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH. Soit BC = a et x la mesure de l'angle B en degrés. Évaluer, en fonction de a et des rapports trigonométriques de l'angle x les longueurs des segments suivants : AB, AC, AH, BH et CH.

122. Soit un triangle ABC rectangle en A et tel que AC = 2 AB. Déterminer les angles de ce triangle.

123. Soit un triangle isocèle ABC de base BC et AH la hauteur issue de A. Soit BAC = $2x$ et AB = a.

1° Évaluer en fonction de a et des rapports trigonométriques de l'angle x les longueurs des segments AH et BH.

2° Évaluer en fonction de a et des rapports trigonométriques de l'angle $2x$ la hauteur issue de B.

Application: $a = 15$ cm; $x = 15°$.

124. Dans un trapèze isocèle ABCD la grande base AB mesure 20 cm. Les côtés non parallèles mesurent 5 cm et font avec AB des angles de 25°. Calculer la hauteur du trapèze et la petite base.

125. Dans un trapèze rectangle ABCD dont les bases sont AB et CD et dont BC est le côté oblique on donne : AB = 30 cm; CD = 18 cm; BC = 20 cm. Calculer la hauteur du trapèze et déterminer ses angles.

126. Soit un triangle ABC de côtés a, b et c et dont les angles sont aigus. Soit O le centre du cercle circonscrit et H le milieu de BC.

1° Que peut-on dire du triangle BOH? Évaluer le rayon du cercle circonscrit en fonction de a et d'un rapport trigonométrique de l'angle A.

2° Démontrer la relation : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

127. On donne un triangle ABC rectangle en A dans lequel l'angle C = 30° et l'hypoténuse BC = a.

1° On mène la hauteur AH. Calculer AH, BH et CH, en fonction de a.

2° On trace la bissectrice AD de l'angle A et l'on abaisse les perpendiculaires DE et DF sur AB et AC. Comparer les triangles DFC, BED et ABC. Calculer BD et DC.

3° Déterminer la nature du quadrilatère AFDE. Calculer son côté AE et sa diagonale AD. *(B.E.P.C.)*

128. Deux droites perpendiculaires $x'x$ et $y'y$ se coupent en O. On porte sur Ox une longueur OA et sur Oy une longueur OB telles que OA = OB = a. Une demi-droite Az coupe Oy en un point C situé entre O et B et la perpendiculaire BI abaissée de B sur Az coupe Ox' en D.

1° Démontrer que OC = OD.

2° Montrer que le quadrilatère OCID est inscriptible et que IO est bissectrice de l'angle CID.

3° Dans le cas où l'angle OAC = 30°, calculer en fonction de a les longueurs AC, OC, AD et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère OCID. *(B.E.P.C.)*

129. Soit un triangle ABC, tel que BC = 2 a, C = 45° et A = 60° (a étant une longueur donnée). On mène les hauteurs BE et CF.

1° Montrer que les quatre points B, F, E, C sont sur un même cercle. Préciser la position de son centre I. Quelle est la position du point E sur le cercle?

2° Montrer que le triangle IFE est équilatéral.

3° Calculer en fonction de a la longueur des segments CE et BE. En utilisant le triangle AEB, calculer ensuite AB, puis AE.

4° Soit K l'intersection de IF avec BE. Montrer que les triangles IBK et CFE sont semblables. *(B.E.P.C.)*

130. Dans un cercle de centre O et de diamètre BC = 13 cm on mène la corde BA = 5 cm.

1° On demande de calculer le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle ABC.

2° On mène la hauteur AH du triangle BAC; calculer AH de deux façons :

a) en utilisant un des résultats trouvés précédemment;

b) en appliquant un théorème relatif aux triangles rectangles.

3° On trace la médiane BM, dont le prolongement coupe le cercle (O) en D. Calculer BM et MD.

3° Comparer les triangles MBC et MAD. En déduire la longueur de la corde AD. *(B.E.P.C.)*

131. Soit un triangle rectangle ABC, d'hypoténuse BC = a et de côtés CA = b. et AB = c.

1° Construire les cercles S_1 de diamètre BC, S_2 de diamètre CA et S_3 de diamètre AB. Où se coupent S_1 et S_2? S_2 et S_3?

2° Une droite D passe par A sans traverser le triangle ABC et recoupe S_1 en E, S_2 en F et S_3 en G. Montrer que les trois triangles AFC, BGA, BEC sont semblables.

3° On désigne par α l'angle aigu CAF. Calculer en utilisant a, b, c et les rapports trigonométriques $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ les côtés de ces trois triangles et vérifier la relation : EB.EC = FC.FA + GA.GB. *(B.E.P.C.)*

132. Soient un triangle ABC rectangle en A, et D un point pris sur AC. On mène la hauteur AH du triangle ABC et la perpendiculaire CE à la droite BD. Les droites BA et CE se coupent en F.

1° Comparer les triangles ABD et ECD.

2° Démontrer que le quadrilatère ABCE est inscriptible dans un cercle dont on déterminera le centre O.

3° En supposant l'angle ABC = 60°, BC = 2 a, AD = a, calculer les longueurs AC, AH et CD.

4° Nature des triangles ACF et BEF? Calculer les longueurs FA, FB et FC.

(B.E.P.C.)

133. Soit un trapèze ABCD, dont les angles A et D sont droits et dans lequel la diagonale AC est perpendiculaire au côté BC.

1° Montrer que les triangles ABC et CAD sont semblables. En déduire la relation : $\overline{AC}^2$ = AB.CD.

2° On trace le cercle de diamètre BC qui coupe AB en E. Quelle est la nature du quadrilatère AECD? Peut-on retrouver la relation établie précédemment? Que représente la droite AC pour le cercle?

3° Sachant que AB = 10 cm, CD = 7,5 cm, calculer les segments AC, BC, AD, BD, puis donner en degrés, la valeur des angles B et C du trapèze. *(B.E.P.C.)*

134. Soient une droite xy et un point A dont la distance à xy est AH = 6 cm. De part et d'autre de AH on trace deux demi-droites d'origine A, coupant xy en B et C et telles que l'angle HAB = 45°, l'angle HAC = 30°. Le cercle de diamètre AH coupe AB en D, AC en E.

1° Calculer les longueurs des segments AB, AE, AC.

2° Montrer que les triangles ABC et AED sont semblables. Calculer la valeur du rapport de similitude et la longueur du segment DE.

3° Soit F le point diamétralement opposé à D. Quelle est en degrés, la mesure de l'angle DFE? Calculer la valeur du sinus de 75°. *(B.E.P.C.)*

135. On donne un carré ABCD de côté a. Sur CD on construit le triangle équilatéral SCD, intérieur au carré.

1° La médiatrice de AB coupe AB en M et CD en H. Exprimer SH et SM en fonction de a. Quelle est la valeur de l'angle SAM? Calculer tg SAM.

2° Construire le centre O du cercle (ASB). Quelle est la nature du quadrilatère OADS? Comparer le rayon du cercle O et le côté du carré ABDC.

3° Montrer que les triangles ASB et OSD sont semblables. Établir la relation : AS.OD = a^2. *(B.E.P.C.)*

136. Dans un triangle ABC, le côté BC est égal à 2 a et la médiane AM à a. On trace la hauteur AD et l'on pose AMB = 2 x.

1° Quelle est la nature du triangle ABC? Calculer AB et AC en fonction de a et x.

2° Calculer BD dans le triangle ABD et DC dans le triangle ADC; en déduire que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3° Dans le cas où x = 30°, achever les calculs relatifs à AB, AC, BD et DC.

4° Soit MH la hauteur du triangle AMC. Démontrer la similitude des triangles ABD et AHM. En fonction de a et de x, calculer AD dans le triangle AMD; démontrer que le rapport de similitude des deux triangles précédents peut être évalué en fonction de l'une des lignes trigonométriques de l'angle x.

En déduire la valeur de ce rapport de similitude dans le cas où x = 60°. *(B.E.P.C.)*

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE CERCLE

66. Théorème I. — ***Si d'un point*** M ***on mène deux sécantes*** MAB ***et*** MCD ***à un cercle, on a la relation :***

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}.$$

Menons AD et BC (fig. 55 et 56). Les triangles MAD et MCB ont les angles

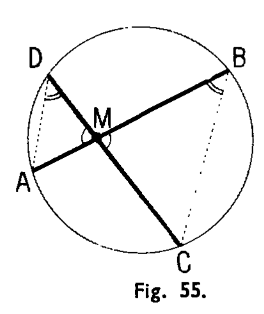


Fig. 55.

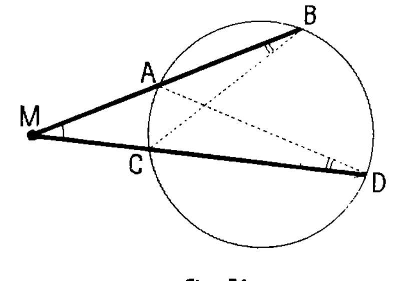


Fig. 56.

en M opposés par le sommet ou confondus et les angles inscrits B et D égaux. Ils sont semblables (1er cas) et :

$$\begin{cases} \text{MAD} \\ \text{MCB} \end{cases} \quad \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \quad \text{soit} \quad MA.MB = MC.MD.$$

Les deux produits $\overline{MA}.\overline{MB}$ et $\overline{MC}.\overline{MD}$ ont même valeur absolue. Ils sont tous deux négatifs si M est intérieur au cercle et tous deux positifs si M est extérieur. Ils sont donc égaux.

67. Réciproque. — ***Si les côtés*** AB ***et*** CD ***d'un quadrilatère se coupent en un point*** M ***tel que*** $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$ ***ce quadrilatère est inscriptible.***

Soit D′ le point où le cercle ABC recoupe CD. On a : $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD'}$ et par suite $\overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MC}.\overline{MD'}$ donc : $\overline{MD} = \overline{MD'}$.

Les points D et D′ sont confondus et le cercle ABC passe par D.

68. Théorème II. — ***Si d'un point* M *extérieur à un cercle on mène une tangente* MA *et une sécante* MBC, *on a la relation :***

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}.\overline{MC}.$$

Les triangles MAB et MCA (fig. 57) ont l'angle M commun et les angles A et C égaux car l'angle formé par la corde AB et la tangente AM est égal à l'angle inscrit ACB. Ces deux triangles sont semblables (1er cas) et on peut écrire :

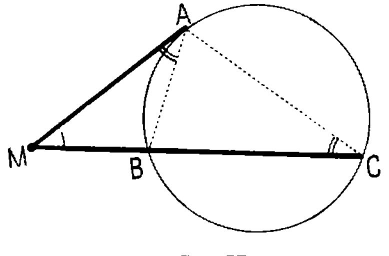


Fig. 57.

$$\begin{cases} MAB \\ MCA \end{cases} \qquad \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA}$$

soit : $\overline{MA}^2 = MB.MC$.

Comme $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}.\overline{MC}$ sont tous deux positifs, ils sont donc égaux.

69. Réciproque. — ***Si un point* M *du côté* BC *d'un triangle* ABC *est tel que* $\overline{MA}^2 = MB.MC$, *la droite* MA *est tangente au cercle circonscrit au triangle.***

Soit A′ le point où le cercle passant par A, B et C recoupe MA. On a $\overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MA}^2$, soit $\overline{MA} = \overline{MA'}$.

Les points A et A′ sont confondus. Autrement dit le cercle ABC est tangent en A à MA.

70. Définition. — Il résulte du théorème (n° 66) que (fig. 58 et 59) :

Si une sécante variable issue d'un point fixe* M *coupe un cercle donné en* A *et* B, *le produit* $\overline{MA}.\overline{MB}$ *a une valeur algébrique* P, *indépendante de la sécante, appelée puissance du point* M *par rapport au cercle.

$$\boxed{P = \overline{MA}.\overline{MB}.}$$

71. Valeur de la puissance. — Désignons par R le rayon du cercle, par d la distance MO et supposons la droite MO orientée dans le sens de M vers O. Les points E et F intersections de MO avec le cercle sont tels que $\overline{OE} = -R$ et $\overline{OF} = R$. D'où (nº 70) :

$$P = \overline{ME}.\overline{MF} = (\overline{MO} + \overline{OE})(\overline{MO} + \overline{OF}) = (d - R)(d + R).$$

Soit : $$\boxed{P = d^2 - R^2}$$

Il est clair que :

Si $d < R$: le point M est intérieur au cercle et P est négatif.
Si $d = R$: le point M est sur le cercle et P est nul.
Si $d > R$: le point M est extérieur au cercle et P est positif.

Notons que la valeur minimum de P est la puissance du centre : $P = -R^2$

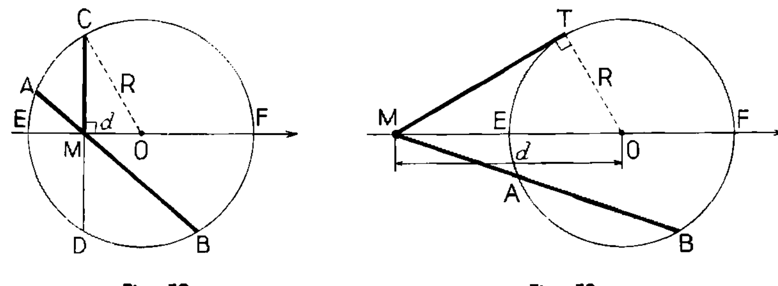


Fig. 58. Fig. 59.

et que tous les points situés à une même distance d du point O ont même puissance. D'autre part :

1º *Si le point* M *est intérieur :* $P = -\overline{MC}^2$ en désignant par CD la corde perpendiculaire à MO (fig. 58).

2º *Si le point* M *est extérieur :* $P = \overline{MT}^2$ en désignant par MT une tangente issue de M (fig. 59).

On vérifie d'ailleurs en considérant les triangles rectangles MOC et MTO que dans les deux cas : $P = d^2 - R^2$.

72. Droites antiparallèles. — Considérons (fig. 60) un angle xOy et deux sécantes parallèles AB et CD. Les triangles OAB et OCD sont semblables et on a les relations :

$$\hat{A} = \hat{C}, \quad \hat{B} = \hat{D} \quad \text{et} \quad \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad \text{d'où} \quad \overline{OA}.\overline{OD} = \overline{OB}.\overline{OC}.$$

Soit de même (fig. 61) un cercle coupant Ox en A et D et Oy en B et C. Les triangles OAB et OCD sont encore semblables et on a les mêmes relations que dans la figure précédente. Notons que si on retourne le triangle OCD de la figure 61 en amenant OC sur OA et OD sur OB on retrouve la figure 60.

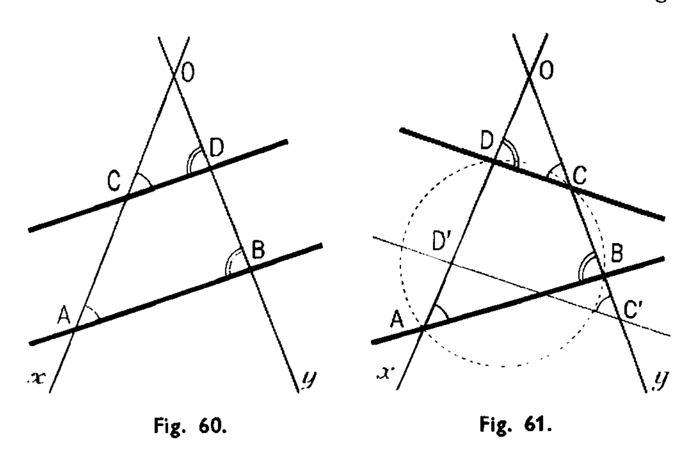


Fig. 60. Fig. 61.

73. Définition. — *Deux sécantes* AB *et* CD *sont antiparallèles par rapport aux droites* AD *et* BC *si le quadrilatère* ABCD *est inscriptible.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que soit vérifiée, la relation :

$$\overline{OA}.\overline{OD} = \overline{OB}.\overline{OC}.$$

74. Théorème. — *Deux droites antiparallèles à une même troisième par rapport aux côtés d'un angle sont parallèles entre elles.*

Si ABCD est inscriptible les angles A et C indiqués sur la figure 61 sont égaux. De même, si ABC'D' est inscriptible les angles A et C' sont égaux. Les angles correspondants C et C' sont donc égaux et les droites CD et C'D' sont parallèles.

EXERCICES

137. Soit un cercle O et un point P extérieur au cercle. Deux sécantes issues de P coupent le cercle, la première en A et B, la seconde en C et D.

1° On donne PA = 12 cm; PB = 7 cm; PC = 6 cm. Calculer PD.

2° Sachant que le rayon du cercle mesure 5 cm, calculer la distance OP.

3° Calculer les distances des cordes AB et CD au centre du cercle.

138. Soit un cercle O, de rayon R et un point P intérieur au cercle. Deux sécantes issues de P coupent le cercle, la première en A et B, la seconde en C et D.

1° On donne PA = 9 cm; PB = 12 cm; PC = 6 cm. Calculer PD.

2° Sachant que R = 15, calculer la distance OP.

3° Calculer la distance des cordes AB et CD au centre du cercle.

139. Soit un segment AC et B un point de ce segment. On fait passer par B et C, un cercle variable de centre O.

1° Quelle courbe décrivent les points de contact T et T′ des tangentes AT et AT′?

2° Soit M le point diamétralement opposé à B et P le point où AM recoupe le cercle O. Montrer que : $\overline{AM} \cdot \overline{AP} = \overline{OA}^2 - \overline{OC}^2$.

3° Quelles sont les courbes décrites par chacun des points M et P?

140. Soient deux cercles O et O′ dont A et B sont les points communs.

1° D'un point C de la droite AB on mène les tangentes CM et CM′ aux deux cercles, comparer CM et CM′.

2° Une sécante passant par C coupe le cercle O en P et Q. Une seconde sécante passant par C coupe le cercle O′ en P′ et Q′. Démontrer que les quatre points P, Q, P′, Q′ appartiennent à un même cercle.

3° Démontrer que la droite AB coupe la tangente commune aux deux cercles en son milieu.

141. Dans un quadrilatère ABCD la diagonale AC est perpendiculaire au côté BC et la diagonale BD perpendiculaire au côté AD. Les diagonales se coupent en E.

1° Démontrer que EA.EC = EB.ED.

2° On donne AB = 65 mm; BC = 25 mm; AD = 39 mm. Construire le quadrilatère. Calculer AC et BD.

3° En utilisant la similitude des triangles EAD et EBC, calculer EA = x, EB = y, puis la valeur des produits EA.EC et EB.ED.

142. Soit un carré de côté a. On divise la diagonale DB en trois parties égales BE, EI, ID. Sur EI comme diamètre on décrit un cercle. On mène la tangente BK à ce cercle. Calculer BK en fonction de a.

143. Soient deux perpendiculaires xx', yy' et P leur point commun. Sur Px on porte PA = 3 a et sur Px' on porte PC = 2 a. Sur Py on porte PB = 4 a et on construit le cercle circonscrit au triangle ABC qui coupe Py' en D. Calculer en fonction de a les longueurs des segments PD, AB, CD.

144. Soit un cercle O de diamètre AB = 10 cm. Sur le prolongement de AB on prend le point P tel que BP = 5 cm. On trace le cercle de centre P, de rayon PO qui coupe le cercle O en C et C′. La sécante PC coupe le cercle O en D.

1° Calculer DP et CD. 2° Démontrer que AC = 2 BD.

145. Soit un segment AB = 12 cm, et sur le prolongement de AB un point S tel que SB = 4 cm.

1° On considère les cercles qui passent par A et B. Démontrer que les points de contact des tangentes menées de S à ces cercles décrivent un cercle dont on calculera le rayon.

2° On considère maintenant le cercle qui a pour diamètre AB. Soient O son centre, T le point de contact d'une des tangentes menées de S, M le pied de la perpendiculaire abaissée de T sur AB. Calculer OM, TM, BM.

3° Évaluer les rapports $\frac{BM}{BS}$ et $\frac{TM}{TS}$. Pouvait-on prévoir le résultat?

(B.E.P.C.)

146. Soient deux cercles O et O′ de rayons R et R′, tangents extérieurement en A. Une tangente commune extérieure TT′ coupe la droite des centres en S. La tangente commune intérieure coupe TT′ en M.

1° Démontrer que le cercle de diamètre OO′ est tangent en M à TT′.

2° En déduire que $\overline{MA}^2 = RR'$ et $\overline{SM}^2 = \overline{SO} \cdot \overline{SO'}$.

3° Démontrer que le cercle de diamètre TT' est tangent en A à OO' et que $\overline{SA}^2 = \overline{ST} \cdot \overline{ST'}$. *(B.E.P.C.)*

147. Soit un triangle ABC, rectangle en A. On mène la hauteur AH. Le cercle de centre H passant par le point A coupe la droite AB en D et la droite AC en E.

1° Montrer que les points D, H, E sont alignés.

2° Montrer que les triangles ABC et ADE sont semblables.

3° Montrer que les quatre points B, C, D, E sont sur un même cercle et que: $\overline{HB} \cdot \overline{HC} = \overline{HD} \cdot \overline{HE}$. *(B.E.P.C.)*

148. Soit un triangle ABC tel que AB = 12 cm, BC = 18 cm, CA = 24 cm. A l'extérieur du triangle ABC on construit un triangle ABD tel que BD = 16 cm et DA = 8 cm, puis un triangle BCE tel que BE = 36 cm et EC = 27 cm.

1° Montrer que les triangles ABC, DAB et BCE sont semblables. Indiquez nettement sur la figure les angles égaux. Rapport de similitude de ces triangles.

2° Montrer que les points D, E, B sont alignés et que le quadrilatère DACE est inscriptible.

3° Le cercle DACE recoupe AB en M et BC en N. Calculer BM, BN et MN.

4° DA et CE se coupent en I. Quelle est la nature du quadrilatère AICB? On mène par I une tangente IT au cercle passant par DACE. Calculer, au mm près, la longueur du segment IT. *(B.E.P.C.)*

149. Soit un cercle de rayon R = 3,5 cm. On construit un diamètre BC de ce cercle, un point A du cercle tel que BA = 5,6 cm et la projection H de A sur BC.

1° Calculer les longueurs de AC, AH, BH.

2° On construit le cercle de centre C, de rayon CB. La droite AC le coupe en D et E. Que représente AB pour le triangle BDE; pour les segments AD et AE?

3° On trace la hauteur AF du triangle ABE. Montrer que AD.AE = BF.BE.

4° Une droite quelconque passant par A coupe le cercle de centre C en I et K. Montrer que $\overline{AB}^2 = AK.AI$. Calculer la mesure de AI lorsque AK est égal à BC $\sqrt{2}$. *(B.E.P.C.)*

150. On considère trois points alignés, dans l'ordre P, C, D, tels que PC = 4 cm, PD = 9 cm, le cercle de diamètre CD, de centre O et un point A de ce cercle tel que PA = 6 cm.

1° Démontrer que PA est tangente au cercle (O).

2° On mène la corde AB perpendiculaire à la droite CD, qu'elle coupe en H. Prouver que les droites AC et AD sont les bissectrices de l'angle PAB. Que représente le point C pour le triangle PAB?

3° Le cercle de centre P et de rayon PA recoupe la droite DA en E et la droite AC en F. Démontrer que les points P, E, F sont alignés et que la droite EF est perpendiculaire à la droite PD. *(B.E.P.C.)*

151. On donne un triangle isocèle ABC, qui a pour base BC. H étant le milieu de BC, on suppose HA > HB. On prend sur le segment BH un point O et l'on trace le cercle qui a pour centre O et qui passe par B. Ce cercle recoupe le côté AB en M et la droite BC en D.

1° Montrer que les quatre points O, M, A, C sont situés sur un même cercle. Montrer qu'il en est de même des quatre points D, H, M, A. Quelle relation a-t-on entre BM, BO, BA et BC?

2° On donne BC = 24 cm, AH = 16 cm et l'on suppose que le point O divise le segment BC dans le rapport 5/7. Calculer AB, OB et OC. Calculer BM, puis DM. Calculer la hauteur du triangle ABC issue de C. *(B.E.P.C.)*

152. Étant donnés trois points A, B, C en ligne droite, B étant situé entre A et C, on fait passer par B et C une circonférence de centre O et l'on mène les tangentes AD et AD' à cette circonférence. La droite DD' coupe AC en E et AO en F.

1° G étant le milieu de BC, démontrer que le quadrilatère FOGE est inscriptible.

2° Démontrer que l'on a la relation $\overline{AD}^2 = AE \times AG$. Calculer AE en fonction de $AB = a$ dans le cas où $BC = \frac{2a}{3}$. De quelle propriété jouit le point E lorsque le rayon du cercle O varie?

3° Dans le cas où AB = 12 cm, BC = 8 cm et OB = 5 cm, calculer la longueur des côtés du quadrilatère OFEG. *(B.E.P.C.)*

153. Soit un cercle de centre O et de rayon R. Deux cordes parallèles de ce cercle sont situées d'un même côté du centre : l'une, AB, est égale au côté du triangle équilatéral inscrit, l'autre D'D, est égale au côté du carré inscrit, les points A et D' étant placés d'un même côté de la médiatrice commune des deux cordes.

1° Donner une construction précise de la figure et calculer en fonction de R la hauteur du trapèze isocèle AD'DB.

2° M désignant le milieu du segment AB et C la seconde intersection de la droite D'M et du cercle donné, on demande de préciser la nature du triangle MDD', de montrer que la droite AB est bissectrice de l'angle CMD et que :

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC \cdot MD.$$

3° Montrer que les trois triangles CMA, AMD et CBD sont semblables entre eux. En déduire que dans le quadrilatère convexe ACBD le produit de deux côtés opposés est égal au demi-produit des diagonales. *(B.E.P.C.)*

154. Soient deux droites D_1 et D_2 perpendiculaires en O. Soit, d'autre part, un point A de D_1 tel que $OA = a$. Un angle droit xAy tourne autour de A. Ax coupe D_2 en B; Ay coupe D_2 en C.

1° Montrer que le produit $OB \times OC$ reste constant quand l'angle xAy tourne autour de A. Quelle est la valeur de ce produit?

2° On abaisse de O la perpendiculaire OE sur Ax (E est sur Ax) et la perpendiculaire OF sur Ay (F est sur Ay). Sur quelle ligne se déplacent E et F quand xAy tourne autour de A? Montrer que EF reste constant.

3° Montrer que les triangles AEF et ABC sont semblables. En déduire une relation métrique qui montre que les points B, C, E et F sont sur un même cercle.

4° On suppose $AB = \frac{5a}{3}$. Calculer OB, AE et OE en fonction de a.

(B.E.P.C.)

155. 1° Soit un segment AB égal à 8 cm. Construire les deux points C et D qui divisent intérieurement et extérieurement ce segment dans le rapport 5/3. On désigne par O le milieu de CD. Calculer CD et AO. Vérifier que $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AO}$.

2° Soit M un point du cercle de diamètre CD. La droite AM recoupe le cercle en N. Montrer que les triangles ABM et AON sont semblables. Calculer le rapport $\frac{MA}{MB}$. Que peut-on dire de ce rapport lorsque M parcourt le cercle?

3° On suppose que M est un point de contact d'une tangente au cercle menée par A. Que deviennent les propriétés de la question 2°? Que peut-on dire du triangle AMB?

4° Quelle propriété doivent posséder les deux triangles de la partie 2° pour que BM et ON soient parallèles? Établir la réciproque. Calculer BM et construire les points M et N dans ce cas. *(B.E.P.C.)*

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

75. Moyenne proportionnelle. — Soient deux segments de mesures respectives a et b. Il s'agit de construire le segment de mesure x tel que :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}. \qquad \text{Soit :} \quad x^2 = ab \iff x = \sqrt{ab}.$$

1re Construction. — Sur une droite $y'y$ (fig. 62), menons successivement deux segments BH $= a$ et HC $= b$. Nous allons construire un triangle rectangle, d'hypoténuse BC, et dont H soit le pied de la hauteur. Le sommet de l'angle droit A appartient au cercle de diamètre BC et à la perpendiculaire en H à BC. Nous avons alors (no 43) :

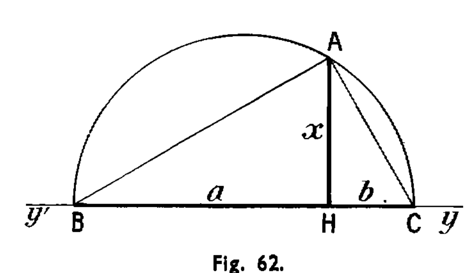


Fig. 62.

$$\overline{AH}^2 = BH.HC = ab.$$

Donc : $AH = x = \sqrt{ab}.$

2e Construction. — Sur une droite $y'y$ (fig. 63), menons BC $= a$ puis, dans le même sens, BH $= b$. Construisons un triangle rectangle ABC, d'hypoténuse BC et dont H soit le pied de la hauteur issue de A. Le sommet A appartient au cercle de diamètre BC et à la perpendiculaire menée en H à BC. Nous avons alors (no 41) :

$$\overline{AB}^2 = BC.BH = ab, \qquad \text{Donc :} \quad AB = x = \sqrt{ab}.$$

3e CONSTRUCTION. — Menons sur une droite $y'y$ (fig. 64) deux segments de même sens $BC = a$ et $BH = b$. Puis traçons un cercle quelconque passant

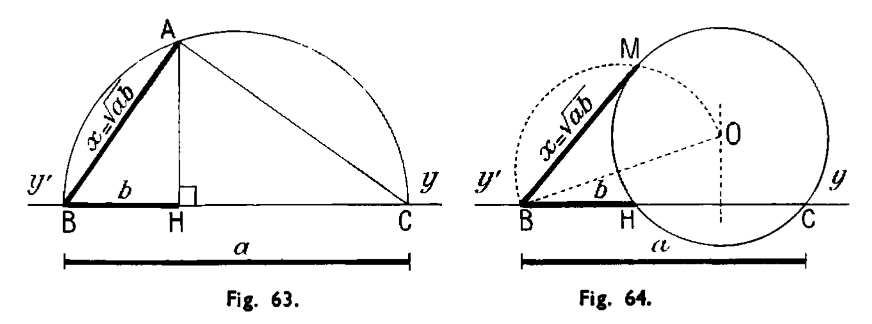


Fig. 63. Fig. 64.

par C et H et menons la tangente BM. Nous avons (no 68) :

$$\overline{BM}^2 = BC.BH = ab. \quad \text{Donc :} \quad BM = x = \sqrt{ab}.$$

76. Applications du théorème de Pythagore. — 1o *Construire un segment de longueur $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, où a et b désignent deux longueurs données.*

Il suffit de construire (fig. 65) un triangle OAB, rectangle en O, et tel que $OA = a$ et $OB = b$. Nous avons :

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = a^2 + b^2, \qquad \text{donc : } AB = \sqrt{a^2 + b^2} = x.$$

2o *Construire un segment de longueur x, donnée par la formule $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.*

Il suffit de construire un triangle ABC, rectangle en A (fig. 66), tel que $BC = a$ et $AC = b$. Le sommet A est à l'intersection du cercle de diamètre BC et du cercle de centre C, de rayon b. Nous avons : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

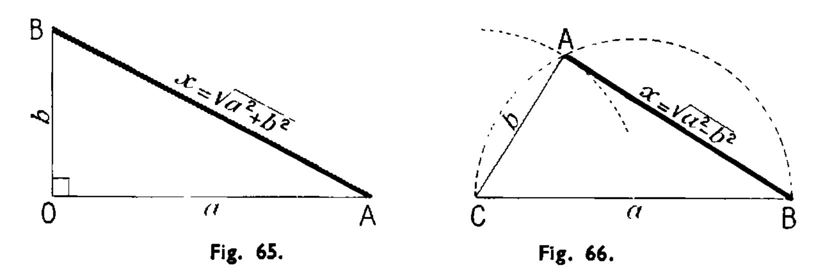


Fig. 65. Fig. 66.

Donc : $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = a^2 - b^2$ et $AB = \sqrt{a^2 - b^2} = x$.

Le problème n'est possible que si l'on a $a \geqslant b$.

77. Construction d'un segment dont la longueur est une racine carrée. — *Soit à construire les segments de longueurs* $x = a\sqrt{2}$, $y = a\sqrt{3}$, $z = a\sqrt{5}$, etc.

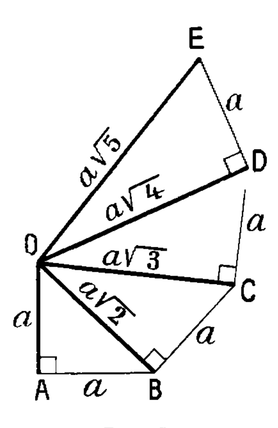


Fig. 67.

Construisons (fig. 67) le triangle AOB, rectangle en A, et tel que OA = AB = a. Nous avons (nº 42) :

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = 2a^2.$$

Donc : OB $= \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ et x = OB.

Construisons (fig. 67) le triangle OBC, rectangle en B, et tel que BC = a. Nous avons :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2.$$

Donc : OC $= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ et y = OC.

De même, en construisant le triangle OCD rectangle en C, et tel que CD = a, nous aurons : OD $= \sqrt{4a^2} = 2a$. Puis en construisant le triangle ODE rectangle en D, et tel que DE = a, nous aurons OE $= \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$, etc.

En particulier, si $a = 1$, les segments successifs issus de O mesurent les racines carrées des nombres entiers : OB $= \sqrt{2}$, OC $= \sqrt{3}$, etc.

78. Cas général. — Au lieu d'utiliser cette construction, il est souvent plus rapide d'opérer différemment. Ainsi pour construire la longueur $x = a\sqrt{42}$ on écrit : $x^2 = 42a^2 = 6a \times 7a$. La longueur x est donc la moyenne proportionnelle entre les longueurs $6a$ et $7a$ (ou $14a$ et $3a$). On utilisera l'une des constructions du nº 75.

79. Exemple. — *Soit à construire la longueur :* $x = a\sqrt{19}$.

Décomposons 19 en une somme algébrique de carrés : $19 = 4^2 + 2^2 - 1^2$.

Construisons le triangle ABC rectangle en A, et tel que AB = $4a$ et AC = $2a$; nous avons (fig. 68) :

$$\overline{BC}^2 = 16a^2 + 4a^2 = 20a^2 \text{ et } BC = a\sqrt{20}.$$

Construisons le triangle BCD rectangle en D et tel que CD = a. Le sommet D appartient au cercle de diamètre BC et au cercle de centre C, de rayon a. Nous avons :

$$\overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 \quad \text{soit :}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 20a^2 - a^2 = 19a^2.$$

Donc : DB $= a\sqrt{19} = x$.

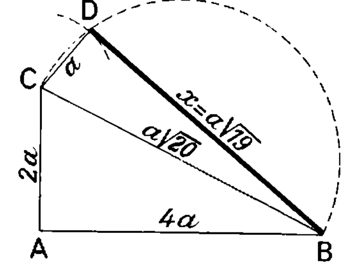


Fig. 68.

EXERCICES

156. a désignant une longueur donnée, construire le segment de longueur x tel que : $x = a\sqrt{7}$; $x = a\sqrt{15}$; $x = a\sqrt{21}$; $x = a\sqrt{13}$.

$x = a\sqrt{12}$; $x = a\sqrt{24}$; $x = a\sqrt{99}$; $x = a\sqrt{101}$.

157. Construire la quatrième proportionnelle de 3 segments dont les longueurs sont en centimètres : $\frac{17}{3}$; $\frac{25}{7}$; et $\frac{41}{9}$. Vérifier par le calcul la longueur obtenue.

158. Construire la moyenne proportionnelle entre deux segments dont les longueurs sont : 2 cm et 18 cm ; 14 mm et 56 mm ; 45 mm et 125 mm.
Vérifier par le calcul la mesure des segments obtenus.

159. Construire un segment de longueur x tel que :

$x = \sqrt{4a^2 + b^2}$; $x = \sqrt{4a^2 + 9b^2}$; $x = \sqrt{a^2 + 4b^2 + 25c^2}$

$x = \sqrt{4a^2 - b^2}$; $x = \sqrt{4a^2 - 9b^2}$; $x = \sqrt{a^2 - 4b^2 + 25c^2}$

sachant que a, b, c désignent des longueurs données.

160. Construire un segment de longueur x tel que

$x = a(1 + \sqrt{2})$; $x = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $x = a(1 + \sqrt{5}$

$x = a(\sqrt{2} - 1)$; $x = a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $x = a(\sqrt{5} - 1)$

où a désigne une longueur donnée.

161. 1° Soit un triangle ABC rectangle en A, et de hauteur AH. Démontrer la relation : $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}$.

2° En désignant par a, b, c trois longueurs données, construire les longueurs x et y définies par les formules : $\frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c}$ et $\frac{a^2}{b^2} = \frac{y}{c}$.

162. 1° Soit un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH. Démontrer la relation : $\frac{1}{\overline{AH}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2}$.

2° Étant données les longueurs b, c et h construire les deux longueurs x et y définies par les formules : $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ et $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{c^2}$.

163. On considère un trapèze isocèle de bases AA' et BB' dont les diagonales AB' et A'B se coupent en I. La parallèle aux bases, menée par I, coupe le cercle O circonscrit au trapèze en C et D.

1° Comparer les triangles IAC, ICB et DAB, ainsi que les triangles IAD, IDB et CAB.

2° Démontrer les relations : AB.AI = AC.AD et $\overline{IC}^2 = \overline{ID}^2$ = IA.IB.

3° En déduire que si on coupe en C et D la bissectrice intérieure de l'angle I d'un triangle IAB par le cercle O passant par A et B et centré sur la bissectrice extérieure de l'angle I, la longeur IC ou ID est la moyenne proportionnelle entre les longueurs IA et IB.

164. 1° Construire un triangle rectangle ABC d'hypoténuse BC = a donnée et de hauteur AH = m donnée. A quelle condition le problème est-il possible et quelles relations a-t-on entre les segments HB et HC?

2° En déduire la construction de deux longueurs x et y connaissant leur somme a et leur moyenne proportionnelle m.

165. 1° On mène à un cercle de diamètre donné AB = d, une tangente de longueur donnée AM = m et on trace le diamètre IJ passant par M. Quelles relations a-t-on entre les longueurs des segments MI et MJ?

2° En déduire une construction de deux longueurs x et y connaissant leur différence d et leur moyenne proportionnelle m.

166. On donne un segment AB = 2 a, de milieu I et l'on trace le demi-cercle de diamètre AB. Soit M un point variable sur ce demi-cercle.

1° Construire les cercles (C) et (D) de centres C et D, passant par M et tangents à AB, le premier en A, le second en B. Montrer que ces deux cercles sont tangents en M. Quelle est leur tangente commune en ce point et quelle est la position de la droite CD par rapport au demi-cercle?

2° Construire le point M sachant que le cercle (C) a un rayon double de celui du cercle (D).

3° Montrer que le produit des rayons des cercles (C) et (D) est constant. Construire la figure connaissant la somme p de ces rayons.

(B.E.P.C.)

167. Soit ABC un triangle quelconque tel que $\widehat{B} > \widehat{C}$. A l'intérieur de l'angle B on trace la droite BD telle que $\widehat{ABD} = \widehat{C}$; D se trouve sur AC.

1° Comparer les triangles ABD et ACB. En déduire que $\overline{AB}^2$ = AD.AC.

2° Soit (O) le cercle circonscrit au triangle BDC. Quelle est la position relative de la droite AB et du cercle (O)?

3° Construire avec la règle et le compas le triangle ABC, sachant que BC = 4 cm, que l'angle A vaut 30° et que, de plus, BD est une hauteur du triangle ABC. Quelle est la nature du triangle ABC? *(B.E.P.C.)*

168. Soit un triangle rectangle isocèle ABC (A = 90°). On prend un point M sur l'hypoténuse BC et l'on construit un cercle passant par M, tangent en B à AB, et un cercle passant par M tangent en C à AC. Ces deux cercles se recoupent en un point N.

1° Indiquer la construction de ces deux cercles.

2° Quand le point M décrit le segment BC, sur quelles lignes se déplacent les centres de ces cercles?

3° Évaluer les angles BNM et CNM; en déduire que le quadrilatère ABNC est inscriptible dans un cercle, dont on précisera le centre.

4° Évaluer l'angle BNA. Démontrer que la droite NM passe par le point A et que le produit AM. AN est constant.

5° Montrer que la somme des rayons des deux cercles est égale à une longueur constante.

(B.E.P.C.)

POLYGONES RÉGULIERS

80. Définition. — ***Un polygone est régulier lorsqu'il a ses côtés égaux et ses angles égaux.***

Exemples. — Le *carré* est un polygone régulier de quatre côtés. Le *triangle équilatéral* est un polygone régulier de trois côtés.

Le théorème suivant prouve l'existence de polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés.

81. Théorème. — ***Si on divise un cercle en un certain nombre d'arcs égaux, les points de division sont les sommets successifs d'un polygone régulier convexe inscrit dans ce cercle.***

Supposons que l'on ait divisé le cercle O (fig. 69) en 5 arcs égaux :

1° Les cordes AB, BC, etc., qui sous-tendent des arcs égaux sont égales. *Le polygone* ABCDE *a ses côtés égaux.*

2° Les angles EAB, ABC, etc., sont des angles inscrits; les arcs qu'ils interceptent sont tous égaux aux $\frac{3}{5}$ du cercle.

Le polygone ABCDE *a ses angles égaux.*

C'est donc un polygone régulier de 5 côtés (pentagone régulier).

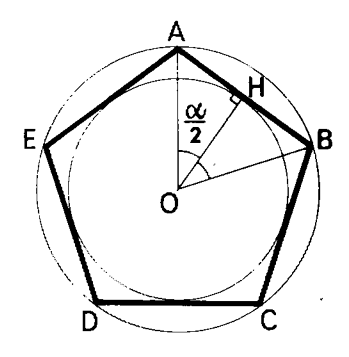


Fig. 69

D'une façon générale, si le cercle est divisé en *n* arcs égaux on obtient par cette méthode un *polygone régulier convexe de* n *côtés inscrit dans ce cercle.*

82. Réciproque. — ***Tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle.***

Si le polygone ABCDE est régulier (fig. 69), les quadrilatères ABCD, BCDE, etc., sont des trapèzes isocèles. Le cercle O, circonscrit au triangle ABC, passe donc par D, quatrième sommet du trapèze isocèle ABCD.

Il est circonscrit au triangle BCD et passe donc de même par E.

83. Cercle inscrit dans un polygone régulier. — Les cordes égales AB, BC, etc. sont à la même distance OH du centre O du cercle circonscrit. Le cercle de centre O et de rayon OH est donc tangent, en son milieu, à chacun des côtés du polygone régulier : c'est le *cercle inscrit* auquel le polygone est circonscrit.

Tout polygone régulier est circonscrit à un cercle concentrique au cercle circonscrit.

84. Définitions. — On appelle (fig. 69) :

Centre du polygone : le centre commun O des cercles inscrit et circonscrit.

Rayon du polygone : le rayon R = OA du cercle circonscrit.

Apothème du polygone : le rayon a = OH du cercle inscrit.

Angle au centre du polygone : l'angle α = AOB formé par les deux rayons aboutissant à deux sommets consécutifs.

Dans un polygone régulier convexe de n côtés, on a : $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.

Angle du polygone : la mesure de chacun des angles tels que ABC. Or : $\widehat{ABC} = 2\,\widehat{ABO} = 2\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 180^\circ - \alpha$. *C'est donc le supplément de l'angle au centre du polygone.*

Connaissant le rayon R d'un polygone régulier de n côtés, on peut calculer trigonométriquement son côté c_n = AB et son apothème a_n = OH. En utilisant le triangle rectangle AOH, on peut écrire : $c_n = AB = 2\,AH = 2\,OA \sin\frac{\alpha}{2}$ et $a_n = OA \cos\frac{\alpha}{2}$. Donc :

$$\boxed{c_n = 2R\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{a_n = R\cos\frac{\alpha}{2}}$$

On peut, pour certaines valeurs de n, construire géométriquement un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon donné R et calculer exactement son *côté* c_n et son *apothème* a_n.

85. Carré. — Soit à inscrire un carré dans le cercle de centre O, de rayon R (fig. 70). Menons deux diamètres perpendiculaires AC et BD; le cercle est partagé en quatre arcs égaux. Le quadrilatère ABCD est le carré cherché.

CALCUL DE c_4 ET DE a_4 — Il s'agit de calculer c_4 = AB, connaissant R. Dans le triangle rectangle isocèle OAB, nous avons (nº 48) : $AB = R\sqrt{2}$. D'autre part le segment OH joint les milieux des côtés AB et AC du triangle ABC.

Nous avons : $OH = \frac{1}{2}\,BC = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Soit : $$\boxed{c_4 = R\sqrt{2} \quad \Big| \quad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

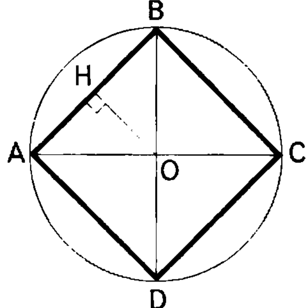


Fig. 70.

86. Hexagone. — Soit AB (fig. 86) le côté de l'hexagone inscrit dans le cercle de centre O. L'arc AB est le sixième du cercle et l'angle AOB vaut donc 60°. Le triangle AOB est équilatéral et AB = OA = R. Ainsi :

Le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit.

D'autre part, l'apothème OH de l'hexagone est la hauteur du triangle équilatéral OAB de côté R. On en déduit (n° 48) :

$$\boxed{c_6 = R \quad \Big| \quad a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}.$$

On partage un cercle en six parties égales en prenant les intersections de ce cercle avec deux cercles de même rayon ayant pour centres les extrémités d'un diamètre (fig. 71).

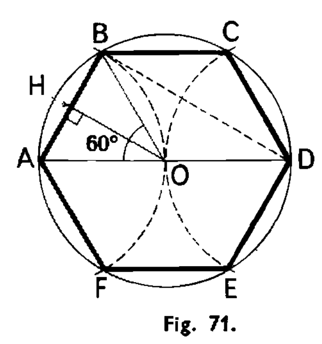


Fig. 71.

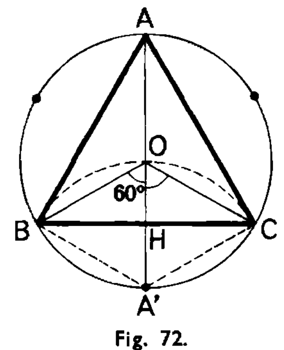


Fig. 72.

87. Triangle équilatéral. — En joignant de deux en deux les points de division d'un cercle partagé en 6 parties égales, on obtient un triangle équilatéral ABC inscrit dans ce cercle (fig. 72).

Si A' désigne le milieu de l'arc BC, les triangles OBA' et OCA' sont équilatéraux de côté R et BC est la médiatrice de OA'. Donc :

$$BC = 2BH = 2.\frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad OH = \frac{1}{2}OA' = \frac{R}{2}.$$

Soit :

$$\boxed{c_3 = R\sqrt{3} \quad \Big| \quad a_3 = \frac{R}{2}}$$

Le point H est le milieu du rayon OA. Donc :

***Le côté* BC *du triangle équilatéral* ABC *inscrit dans un cercle est la médiatrice du rayon* OA' *opposé à* OA.**

88. Généralisation. — En menant les médiatrices des côtés d'un polygone régulier convexe de n côtés inscrit dans le cercle, on partage ce dernier en $2n$ parties égales. Soit (fig. 73) : $c_{2n} = AB = AB'$, $a_{2n} = OH = \frac{1}{2}A'B$.

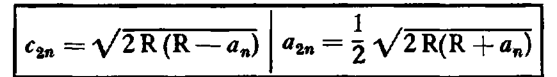
On a : $BB' = c_n$ et $OI = a_n$.

Donc $AI = R - a_n$ et $A'I = R + a_n$.

Dans le triangle ABA' rectangle en B et de hauteur BI, on peut donc écrire (nº 41) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AA'}.\overline{AI} = 2R(R - a_n).$$

De même : $\overline{A'B}^2 = 2R(R + a_n)$. D'où :



$$c_{2n} = \sqrt{2R(R - a_n)} \qquad a_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{2R(R + a_n)}$$



En faisant $n = 4$ ou $n = 6$ on trouvera :

Fig. 73.

Octogone convexe : $c_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Dodécagone convexe : $c_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; $a_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

PÉRIMÈTRE DU CERCLE

89. Définition. — Le cercle est une ligne courbe dont la longueur n'est pas directement comparable à celle du segment unité. Par définition :

Le périmètre d'un cercle est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier convexe inscrit lorsque le nombre de ses côtés augmente indéfiniment.

On démontre que cette limite P existe et qu'elle est proportionnelle au diamètre 2R du cercle. Donc :

90. Théorème. — ***Le périmètre du cercle est égal au produit de son diamètre par un nombre constant*** $\pi = 3,141592...$

On obtient : $P = 2R \times \pi$, soit : $P = 2\pi R$.

Pratiquement, on se contente de prendre pour π les valeurs approchées : 3,14 ou 3,1416 ou même $\frac{22}{7}$. Notons que : $\frac{1}{\pi} = 0,31831$.

91. Longueur d'un arc. — Dans un cercle donné, l'addition de deux arcs entraîne l'addition de leurs longueurs ainsi que celle de leurs mesures :

Dans un cercle donné, la longueur d'un arc est proportionnelle à sa mesure en degrés ou en grades.

Or, le cercle entier, de longueur $2\pi R$ vaut 360° ou 400 grades. Un arc de 1° a pour longueur $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ et un arc de 1 grade a pour longueur

$$\frac{2\pi R}{400} = \frac{\pi R}{200}.$$

La longueur l d'un arc AMB de α degrés ou de g grades (fig. 74) est donc :

$$\boxed{l = \frac{\pi R \alpha}{180}} \quad \text{ou} \quad \boxed{l = \frac{\pi R g}{200}}$$

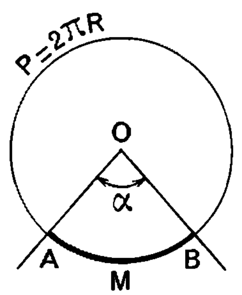


Fig. 74.

92. Radian. — ***On appelle radian tout arc de cercle dont la longueur est égale au rayon*** (*abréviation* 1rd).

On appelle angle de un radian tout angle au centre qui intercepte un arc de un radian (fig. 75).

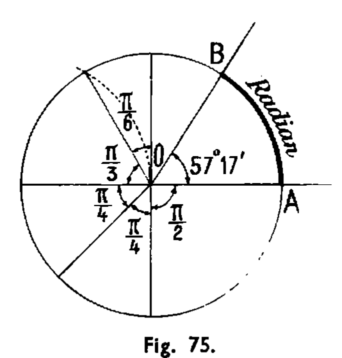


Fig. 75.

Il y a 2π radians dans un cercle. Par suite le radian vaut :

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 180^\circ \times 0{,}31831 = 57^\circ 17' 45''.$$

$$\frac{400\,\text{gr}}{2\pi} = 200\,\text{gr} \times 0{,}31831 = 63{,}662...\,\text{gr}.$$

On en déduit que : $180^\circ = \pi\,\text{rd}$; $90^\circ = \frac{\pi}{2}\,\text{rd}$;

$60^\circ = \frac{\pi}{3}\,\text{rd}$; $45^\circ = \frac{\pi}{4}\,\text{rd}$ et $30^\circ = \frac{\pi}{6}\,\text{rd}$.

93. Théorème. — ***La longueur d'un arc de cercle est égale au produit de son rayon par sa mesure en radians.***

La longueur d'un arc de 1 rd est R. Celle d'un arc de ω rd est donc $R\omega$.

$$\boxed{l = R\omega}$$

En particulier, dans un cercle de rayon 1, la longueur d'un arc est égale à sa mesure en radians.

EXERCICES

169. Montrer qu'un octogone régulier a 8 axes de symétries et qu'il a un centre de symétrie. Généraliser pour un polygone régulier de 2 n côtés.

170. Montrer qu'un pentagone régulier a 5 axes de symétries. A-t-il un centre de symétrle? Généraliser pour un polygone régulier dont le nombre des côtés est impair.

171. Les tangentes à un cercle, aux différents sommets d'un polygone réguller convexe inscrit forment un polygone convexe circonscrit. Démontrer que ce nouveau polygone est régulier et calculer son côté en fonction de R et de c du premier.

172. En joignant de 3 en 3 les points de division d'un cercle partagé en 8 parties égales, on forme un *octogone régulier étoilé* inscrit dans le cercle. Comparer son côté c'_8 et son apothème a'_8, à l'apothème a_8 et au côté c_8 de l'octogone convexe.

173. Soient A, B, C, D et E cinq sommets consécutifs d'un polygone réguller de centre O.

1° Les côtés AB et CD se coupent en I. Montrer que le quadrllatère OAIC est inscriptible dans un cercle tangent en C à CE.

2° Les droites AC et BD se coupent en J. Montrer que le quadrilatère OABJ est inscriptible dans un cercle tangent en B à BC et passant par le point K commun à AD et BE.

174. Sur chaque côté d'un hexagone régulier on construit, extérleurement à l'hexagone, un carré.

1° Démontrer que les 12 points obtenus sont les sommets d'un polygone réguller de 12 côtés (dodécagone régulier).

2° Calculer l'apothème a et le rayon R du dodécagone en fonction de son côté c.

175. On prolonge, dans les deux sens, les quatre côtés d'un carré ABCD de centre O et de côté a, de segments égaux à OA. Montrer que les huit extrémités de ces segments sont les sommets d'un octogone réguller convexe. Calculer en fonction de a le côté, l'apothème et le rayon de cet octogone.

176. Dans un cercle O, de rayon R on mène trois cordes $AB = R\sqrt{2}$; $BC = R$ et $CD = R\sqrt{3}$; les points A, B, C, D se trouvant dans cet ordre sur le cercle donné. Calculer AD et les angles du quadrilatère.

177. Soit un cercle O de rayon R; on trace un segment $OA = R\sqrt{3}$ puis de A, la tangente AB au cercle.

1° Calculer AB en fonction de R.

2° Montrer que AB est le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle O.

178. Soit un cercle de diamètre $AB = 2R$. On mène la corde AC telle que l'angle $AOC = 120°$. Calculer en fonction de R le périmètre du triangle ABC.

179. Soit un cercle O de diamètre $AB = 2R$; on prolonge BA d'une longueur $AP = R$. La tangente PM, menée de P au cercle, coupe respectivement en C et D les tangentes en A et B au même cercle.

1° Soit H la projection de M sur AB. Calculer les segments : PM, PH, MH, AC et BD.

2° Montrer que le triangle COD est la moitié d'un triangle équilatéral et calculer son périmètre.

180. Soit un demi-cercle O de diamètre $AA' = 2R$. Une corde AB sous-tend un arc égal au $\frac{1}{10}$ du cercle; une corde AC sous-tend un arc égal aux $\frac{3}{10}$ du cercle. AC coupe OB en D.

1° Montrer que AB et AC sont les côtés de deux décagones réguliers l'un convexe, l'autre étoilé, inscrits dans le cercle.

2° Démontrer que les triangles ABD et OCD sont isocèles. Calculer leurs angles.

3° Démontrer les relations $AC - AB = R$ et $AB.AC = R^2$.

181. Soit un pentagone régulier convexe ABCDE de centre O. On construit les diagonales AC et BE qui se coupent en I.

1° Évaluer les angles des triangles AEI et ACE. Que peut-on dire de ces triangles?

2° Étudier de même les triangles AIB et ABC. Nature du quadrilatère ICDE?

3° Montrer que le quadrilatère BIOC est inscriptible dans un cercle tangent à AB et démontrer la relation : $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + AB.AC.$

— Calculer en radians la mesure des angles suivants :

182. 23° et 37 gr. **183.** 127° et 143 gr. **184.** 43°36′ et 25,7 gr.

185. 61° et 46 gr. **186.** 135° et 160 gr. **187.** 62°48′ et 45,6 gr.

— Calculer en degrés, puis en grades, les arcs suivants :

188. $\frac{3\pi}{5}$ rd et 4,56 rd. **189.** $\frac{5\pi}{8}$ rd et 0,26 rd. **190.** $\frac{7\pi}{9}$ rd et 1,67 rd.

— Calculer la longueur d'un arc de rayon R et de mesure α :

191. $R = 17$; $\alpha = 43°$. **192.** $R = 56$; $\alpha = 78$ gr. **193.** $R = 105$; $\alpha = 3,6$ rd.

194. $R = 83$; $\alpha = 67°36'$. **195.** $R = 72$; $\alpha = 52,6$ gr **196.** $R = 34$; $\alpha = \frac{3\pi}{5}$ rd.

— Trouver le rayon d'un arc connaissant sa longueur l et sa mesure α :

197. $l = 157$; $\alpha = 36°$. **198.** $l = 43,7$; $\alpha = 52$ gr. **199.** $l = 58$; $\alpha = 2,3$ rd.

200. Dans un cercle O donné, on trace le cercle I ayant pour diamètre le rayon OA. Le cercle I coupe le rayon OB du cercle O en C. Comparer les longueurs des arcs AB et AC des deux cercles.

201. Deux poulies de rayons respectifs 14 cm et 25 cm, situées dans un même plan, ont des axes distants de 61 cm. Elles sont reliées par une courroie non croisée. Quelle est la longueur de cette courroie?

202. Soit un cercle de centre O et dont le rayon R = 5 cm.

1° Indiquer le moyen de mener une corde AB telle que l'arc qu'elle sous-tend soit égal à 150° (ne pas se servir du rapporteur).

2° Sur le plus grand des deux arcs AB, déterminer un point C tel que si l'on abaisse la perpendiculaire CH sur AB on ait AH = CH.

3° Calculer les arcs CB, AC, les trois côtés et les trois hauteurs du triangle ABC.
(B.E.P.C.)

203. On donne un triangle rectangle en A, l'angle B vaut 60° et BC = a.

1° Quel doit être, en fonction de a, le rayon d'un cercle de centre C pour que ce cercle soit tangent à AB?

2° Montrer que AC est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle O de diamètre BC :

a) d'après la figure géométrique,

b) d'après la valeur trouvée pour AC.

3° On trace en C la tangente au cercle O circonscrit au triangle ABC, soit D le point de rencontre de cette tangente avec AB. Démontrer que les deux triangles ABC et ACD sont semblables et indiquer leur rapport de similitude. En déduire les longueurs de AD et de CD. *(B.E.P.C.)*

204. On donne un cercle O; tracer une corde AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle. On joint un point M quelconque, pris sur l'arc AB plus grand qu'un demi-cercle, aux points A et B, et l'on porte sur MA, de M vers A, une longueur MC = MB.

1° Quelle est la valeur de l'angle AMB et quelle est la nature du triangle MBC?

2° On mène par M la parallèle à BC, qui coupe le cercle O en P. Quelle est la valeur de l'angle AMP? Si M décrit l'arc AB, les points A et B étant fixes, le point P se déplace-t-il?

3° Calculer les angles du triangle APB. Quelle est la nature de ce triangle? *(B.E.P.C.)*

MESURE DES AIRES

94. Surface. — Toute ligne plane fermée non croisée limite une portion de plan appelée *surface*. Deux polygones égaux limitent des portions de plans superposables : *leurs surfaces sont égales.*

Si nous juxtaposons deux polygones P et Q (fig. 76) nous obtenons une portion de plan d'un seul tenant limitée par un polygone R. Par définition, la *surface du polygone* R *est la somme des surfaces* P *et* Q. Il en est de même de la surface

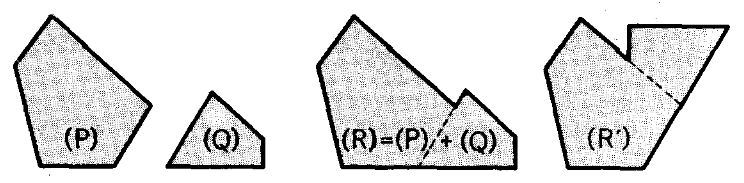


Fig. 76.

du polygone R′ obtenu en juxtaposant d'une autre manière les polygones P et Q. Les deux polygones R et R′ non superposables, mais dont les surfaces ont cependant même étendue, sont *équivalents.*

95. Mesure des surfaces. — Nous avons défini l'égalité et la somme de deux surfaces. Les surfaces sont des grandeurs mesurables.

1° ***On adopte pour unité de surface la surface du carré qui a pour côté l'unité de longueur.*** Ainsi l'unité de surface qui correspond au mètre est le mètre carré : carré de 1 m de côté (1 m^2), etc.

2° ***On appelle aire d'un polygone le nombre qui mesure sa surface. Deux polygones équivalents ont même aire.***

Dans ce qui suit nous supposerons que : *Toutes les longueurs sont mesurées avec la même unité et que les aires sont mesurées avec l'unité de surface correspondant à cette unité de longueur.*

96. Aire d'un rectangle. — ***L'aire d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions.***

1° Soit un rectangle ABCD tel que AB = 5 m et AD = 3 m (fig. 77). On peut le partager en $5 \times 3 = 15$ carrés de 1 m de côté. Son aire est donc égale à (5×3) m².

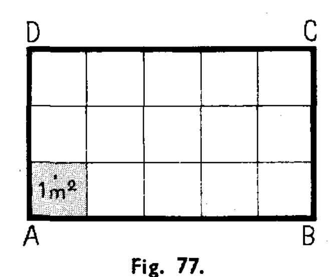


Fig. 77.

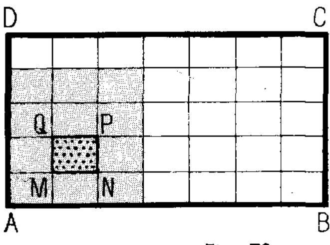


Fig. 78.

2° Soit un rectangle ABCD tel que $AB = \frac{7}{3}$ m et $AD = \frac{5}{4}$ m (fig. 78). Ce rectangle est égal à la somme de $7 \times 5 = 35$ rectangles égaux au rectangle MNPQ dont les dimensions sont $\frac{1}{3}$ m et $\frac{1}{4}$ m. Or ce rectangle MNPQ est contenu $3 \times 4 = 12$ fois dans le carré de 1 m de côté et son aire est égale à $\frac{1}{12}$ m². Donc : $S = \frac{1}{12}$ m² $\times 35 = \frac{35}{12}$ m². Soit : $S = \left(\frac{7}{3} \times \frac{5}{4}\right)$ m².

D'une façon générale, on désigne par a et b les dimensions du rectangle, et par S son aire, on obtient :

$$S = ab.$$

97. Corollaire. — ***L'aire d'un carré est égale au carré de son côté.***

$$S = a^2.$$

Donc : 1 m² = 100 dm²; 1 dam² = 100 m²; 1 dm² = 100 cm²..., etc.

98. Théorème. — ***L'aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit des côtés de l'angle droit.***

En effet (fig. 79) l'aire S du triangle rectangle ABC est la moitié de celle du rectangle ABDC. Donc : $S = \frac{1}{2}$ AB.AC.

99. Théorème. — ***L'aire d'un triangle est égale au demi-produit d'un côté par la hauteur correspondante.***

L'aire du triangle ABC de hauteur AA′ est égale à la somme des aires des triangles rectangles A′AB et A′AC (fig. 80) ou à leur différence (fig. 81).

Donc : $S = \frac{1}{2}$ BA'.AA' $\pm \frac{1}{2}$ A'C.AA' $= \frac{1}{2}$ (BA' $\pm$ A'C) AA' $= \frac{1}{2}$ BC.AA'.

Soit : $$\boxed{S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c.}$$

Ainsi l'aire du triangle équilatéral de côté a est : $S = \frac{1}{2}a \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

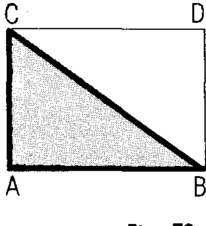


Fig. 79.

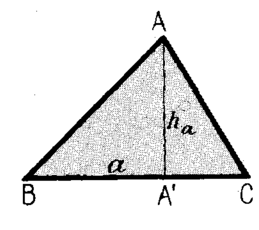


Fig. 80.

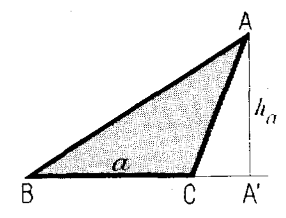


Fig. 81.

Deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalents.

100. Corollaire. — ***L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de deux côtés par le sinus de l'angle aigu formé par ces côtés.***

Dans le triangle ABC (fig. 80 et 81) on a : AA' = AC. sin ACA'. Donc :

$S = \frac{1}{2}$ AC. BC sin ACA'. Si l'angle A est aigu : $\boxed{S = \frac{1}{2} bc \sin A.}$

101. Aire d'un parallélogramme. — ***L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur.***

L'aire du parallélogramme ABCD est le double de l'aire du triangle ABC (fig. 82).

Donc : S = BC.AA'. Posons BC $= b$ et AA' $= h$. Nous obtenons : $\boxed{S = bh.}$

Posons AB $= a$, BC $= b$ et ABC $= \theta$. Dans le triangle ABA' on a : $h = a \sin \theta$.

Donc : $S = b.a \sin \theta$, soit : $\boxed{S = ab \sin \theta}$

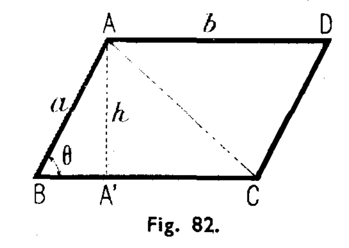


Fig. 82.

L'aire du parallélogramme est égale au produit de deux côtés consécutifs par le sinus de l'angle aigu formé par ces deux côtés.

102. Aire du trapèze. — ***L'aire d'un trapèze est égale au demi-produit de la somme des bases par la hauteur.***

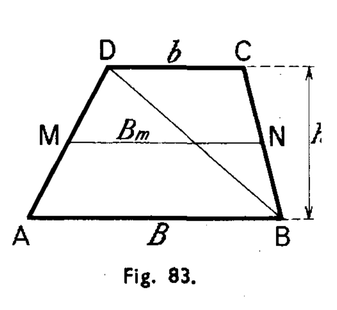


Fig. 83.

L'aire du trapèze ABCD de bases AB $= B$ et CD $= b$ et de hauteur h est égale à la somme des aires des triangles ABD et BCD (fig. 83). Donc :

$$S = \frac{1}{2} Bb + \frac{1}{2} bh \quad \text{ou :} \quad \boxed{S = \frac{(B+b)h}{2}.}$$

Soit, en désignant par B_m la base moyenne MN $= \frac{B+b}{2}$, la formule : $\boxed{S = B_m h}$

103. Aire du losange. — ***L'aire d'un losange est égale au demi-produit de ses diagonales.***

L'aire du losange ABCD (fig. 84) est le double de l'aire du triangle ABD ou BDC. Donc :

$$S = \text{BD.AO} = \frac{1}{2}\,\text{AC.BD}$$

Si AC $= x$, BD $= y$, on a : $\boxed{S = \frac{1}{2}xy.}$

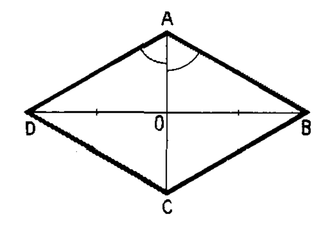


Fig. 84.

104. Aire d'un polygone quelconque. — 1° ***Par décomposition.*** — L'aire du polygone ABCDEF (fig. 85) est la somme des aires des triangles ABC, ACD, ADE et AEF. L'aire du polygone ABCDEF (fig. 86) est égale à la somme des aires des triangles rectangles ABB′, CC′D, EE′D, AFF′ et des trapèzes rectangles BCC′B′ et EFF′E′ (*Procédé des arpenteurs*).

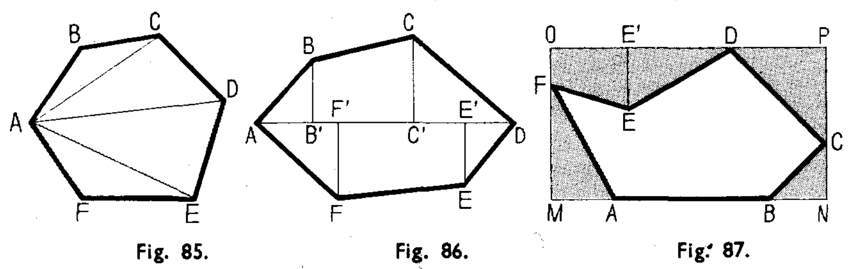


Fig. 85. Fig. 86. Fig. 87.

2° ***Par différence.*** — L'aire du polygone ABCDEF (fig. 87) est égale à l'aire du rectangle circonscrit MNPQ diminuée de la somme des aires des triangles rectangles BNC, CPD, DEE′ et FMA et du trapèze rectangle EE′QF *(aire d'une pièce d'eau)*.

105. Aire d'un polygone régulier convexe. — ***L'aire d'un polygone régulier convexe est égale au demi-produit de son périmètre et de son apothème.***

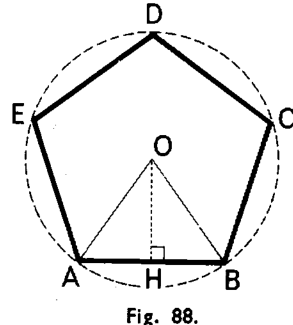


Fig. 88.

Considérons par exemple le pentagone régulier ABCDE (fig. 88) de centre O et d'apothème OH. Son aire s'obtient en multipliant par 5 celle du triangle OAB. Donc :

$$S = \frac{AB.OH}{2} \times 5 = \frac{5\,AB.OH}{2}.$$

Or 5 AB est le périmètre du polygone ABCDE. Donc, l'aire du pentagone régulier s'obtient en multipliant le périmètre par la moitié de l'apothème. Il en est de même, quel que soit le nombre des côtés du polygone considéré.

EXEMPLE. — L'aire de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R (n° 86) est donc : $S = \frac{1}{2} \times 6R \times \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Soit : $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

106. Aire du cercle. — ***On démontre et nous admettons que l'aire d'un cercle est égale au produit par π du carré de son rayon.***

L'aire S d'un cercle de rayon R est donc : $\boxed{S = \pi R^2.}$

Cette formule peut s'écrire : $S = \pi R \times R$. On voit que l'aire S d'un cercle est égale au demi-produit de son périmètre par son rayon. Si on désigne par D le diamètre du cercle on obtient : $R = \frac{D}{2}$ et $S = \frac{\pi D^2}{4}$.

107. Secteur circulaire. — Dans un cercle donné, l'addition de deux arcs entraîne celle des secteurs correspondants. Il en résulte que :

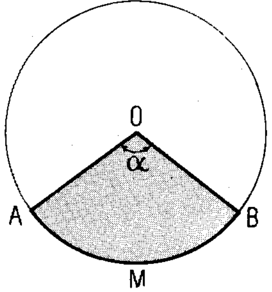


Fig. 89.

L'aire d'un secteur est proportionnelle à la mesure de son angle au centre.

On a donc $\frac{\pi R^2}{360}$ pour l'aire d'un secteur de 1°, $\frac{\pi R^2}{400}$ pour un secteur de 1 grade et par suite pour le secteur OAMB (fig. 89) de α degrés ou *g* grades :

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}} \quad \text{ou} \quad \boxed{S = \frac{\pi R^2 g}{400}}$$

De même l'aire d'un secteur de 1 radian est : $\frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{R^2}{2}$. Par suite l'aire d'un secteur de ω radians est : $\boxed{S = \frac{1}{2} R^2 \omega}$

EXERCICES

205. L'aire d'un rectangle est 4 704 m². La largeur est les 2/3 de la longueur. Calculer les deux dimensions.

206. 1° En décomposant un carré de côté $a + b$ en quatre parties par deux parallèles à deux côtés consécutifs, vérifier l'identité :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2.$$

2° En retranchant d'un carré de côté a un carré de côté b vérifier l'identité :

$$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b).$$

207. Calculer l'aire d'un triangle ABC sachant que :

1° $A = 60°$; $b = 15$ cm; $c = 12$ cm.
2° $A = 45°$; $b = 20$ cm; $c = 13$ cm.
3° $A = 120°$; $b = 24$ cm; $c = 17$ cm.
4° $A = 42°$; $b = 25$ cm; $c = 18$ cm.
5° $A = 113°$; $b = 22$ cm; $c = 14$ cm.
6° $A = 138°$; $b = 27$ cm; $c = 21$ cm.

208. Démontrer que l'aire S d'un triangle ABC de côtés a, b, c inscrit dans un cercle de rayon R vérifie la relation : $abc = 4\,RS$.

209. Dans le triangle ABC on pose $a + b + c = 2\,p$ et on désigne par r et r' les rayons des cercles inscrit et ex-inscrit dans l'angle A de centres respectifs I et J.

1° Démontrer les relations : $S = pr$ et $S = (p - a)r'$.

2° Soient ID et JE les rayons perpendiculaires à AB des cercles I et J. Comparer les triangles DBI et EJB puis montrer que $rr' = (p - b)\,(p - c)$.

3° En déduire la relation : $S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$.

210. Démontrer que l'aire d'un quadrilatère (convexe ou concave) est égale au demi-produit de ses diagonales x et y par le sinus de leur angle aigu.

211. Soit AD la bissectrice intérieure issue du sommet A du triangle ABC. Évaluer de deux façons différentes le rapport des aires des triangles ABD et ACD et retrouver la relation : $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

212. On construit extérieurement à un triangle ABC rectangle en A, le carré BCDE. Soient F et G les projections orthogonales de D et E sur la droite AB et H et K les projections de C et E sur DF.

1° Comparer les quatre triangles ABC, GEB, KED, et HDC.

2° Nature des quadrilatères AFHC et FGEK. Comparer leur somme au carré BDCE et retrouver ainsi la relation : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

213. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC sont $b = 12$ cm et $c = 5$ cm.

1° Calculer l'hypoténuse a, la hauteur h et le rayon r du cercle inscrit.

2° Démontrer que l'aire S du triangle ABC est égale au produit BD.DC, des segments déterminés sur l'hypoténuse par le point de contact D du cercle inscrit.

214. Un trapèze ABCD est rectangle en A et D et l'angle ABC est égal à 45°. La médiatrice du côté BC coupe la droite AD en I. Démontrer que le triangle IBC est équivalent au trapèze ABCD.

215. Les côtés d'un triangle ABC sont $BC = 5\,a$, $CA = 4\,a$ et $AB = 3\,a$.

1° Démontrer que le triangle est rectangle et que le rayon du cercle inscrit est a.

2° On construit un triangle A'B'C' dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux du triangle ABC, à l'extérieur de ce triangle et à la distance d. Démontrer que $a + d$ est le rayon du cercle inscrit au triangle A'B'C'. Calculer les côtés du triangle A'B'C'.

3° On donne d et l'aire k^2 de la surface comprise entre les deux triangles, calculer les côtés des deux triangles en fonction de d et k.

216. On prolonge dans les deux sens les côtés d'un carré d'une longueur égale à la demi-diagonale.
1° Montrer que les 8 points obtenus sont les sommets d'un octogone régulier.
2° Calculer l'aire de cet octogone connaissant le côté a du carré.

217. On construit extérieurement à un hexagone régulier les carrés ayant pour bases les côtés de cet hexagone.
1° Montrer que les douze points obtenus sont les sommets d'un polygone régulier.
2° Calculer l'aire de ce polygone en fonction du côté a de l'hexagone.

218. Dans un trapèze ABCD de bases AB et CD on donne $CD = 4\,a$, $AD = 2\,a$, l'angle $C = 45°$ et l'angle $D = 60°$. Calculer l'aire du trapèze.

219. On trace dans un cercle deux cordes parallèles AB et DC. La première est le côté de l'hexagone régulier inscrit, la seconde le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle. Les deux cordes sont de part et d'autre du centre.
1° Calculer l'aire du trapèze ABCD en fonction de R, rayon du cercle.
2° Calculer R sachant que l'aire du trapèze est 1 m².

220. Calculer le rayon d'un cercle dont l'aire mesure 1 m²; 3,757 dm²; 54,27 m².

221. Calculer l'aire d'un cercle dont le périmètre est $2\,p$. Application : $p = 75$ m.

222. 1° Calculer l'aire d'un secteur OAB d'un cercle de centre O, de rayon R sachant que l'angle AOB mesure 45°, 60°, 30°, 120°, 53°, 137°.
2° Calculer dans les mêmes conditions l'aire du segment limité par la corde AB.

223. Calculer le rayon, le périmètre et l'aire du cercle inscrit dans un secteur circulaire de rayon a et d'angle $2\,\alpha$. Applications : $\alpha = 30°$, 45° et 60°.

224. Soient AB et CD deux diamètres rectangulaires d'un cercle de rayon R. L'arc de cercle CD de centre A coupe AB en E. Comparer l'aire de la lunule CBDE à celle du triangle ACD.

225. On considère un carré de côté a. Les demi-cercles décrits sur les côtés du carré comme diamètres limitent à l'intérieur du carré une rosace à quatre feuilles dont on demande le périmètre et l'aire (désigner par x et y les aires d'une feuille et d'un entre-deux feuilles et opérer algébriquement).

226. A l'intérieur d'un hexagone régulier de côté a on décrit les arcs de cercle de rayon a centrés aux six sommets. Calculer le périmètre et l'aire de la rosace à six feuilles ainsi délimitée (cf. ex. précédent).

227. Deux cercles égaux O et O' ont pour rayon $R = OO'$ et se coupent en I et J. Soient IA, IA', JB et JB' les diamètres issus de I et J. On décrit les arcs AA' et BB' de centres respectifs I et J. Calculer le périmètre et l'aire de l'ovale à quatre centres AB B'A'.

228. Soit le demi-cercle de diamètre $AB = 2\,R$ et la tangente Ax à ce demi-cercle. On joint un point variable P de la demi-droite Ax à B et l'on désigne par C le point d'intersection de PB et du demi-cercle.
1° Démontrer que le produit BP.BC est constant.
2° Quelle ligne décrit le milieu de AC lorsque P décrit la demi-droite Ax?
3° Déterminer géométriquement le point C pour que $AP = \frac{PB}{2}$ et calculer l'aire de la portion du triangle PAB située à l'extérieur du demi-cercle. *(B.E.P.C.)*

229. 1° Indiquer, sans la justifier, la construction de l'hexagone régulier inscrit.
2° Soit un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans un cercle de rayon R; en E on élève la perpendiculaire à DE qui coupe le prolongement de CD en G.
a) Quelle est la nature du quadrilatère EBCG?
b) Calculer EG, GD (en fonction de R); trouver le périmètre de EBCG.
c) Calculer l'aire du quadrilatère EBCG.
3° On joint FG. Aire du triangle FEG. *(B.E.P.C.)*

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

14e Leçon

GÉNÉRALITÉS SUR LE PLAN

108. Le plan. — La surface d'une nappe d'eau au repos, celle du tableau donnent la *notion de plan*. Plaçons les extrémités de l'arête rectiligne d'une règle sur la surface du tableau. Nous constatons que tous les points de cette arête sont en contact avec le tableau et ceci, quelle que soit la position de cette arête. Cette propriété est dite *caractéristique* du plan (fig. 90) :

Le plan est une surface telle que toute droite joignant deux points de cette surface y soit contenue tout entière.

Le menuisier, l'ajusteur utilisent cette propriété pour reconnaître qu'une surface est plane (fig. 90).

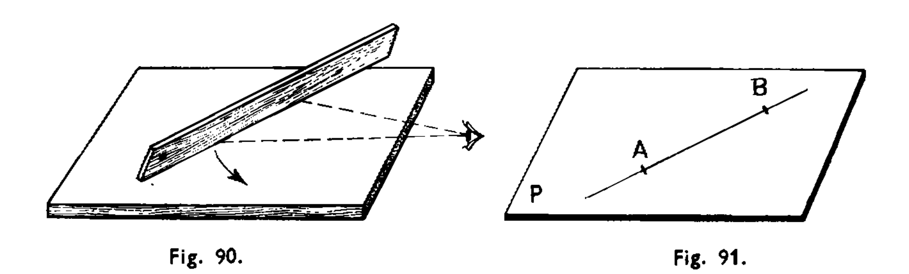


Fig. 90. Fig. 91.

La droite AB (fig. 91) est illimitée. Il en est de même de tout plan qui la contient. Pratiquement, on ne dessine jamais que des *portions de plan* le plus souvent limitées à la région intérieure à un rectangle représenté en perspective conventionnelle par un parallélogramme. Une lettre placée dans l'un de ses angles suffit à nommer le plan considéré : on dit « le plan P ».

Certains solides usuels (cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide) sont limités par des portions de plan. D'autres, appelés corps ronds, tels que cylindre, cône, sphère ne sont pas entièrement limités par des portions de plan.

109. Positions relatives d'une droite et d'un plan. — 1° Si une droite Δ a deux points dans un plan elle y est contenue tout entière. C'est le cas de l'arête de la règle de la figure 90.

2° ***Une droite, non contenue dans un plan, a au plus un point commun avec ce plan.***

En effet, si elle en avait deux, elle serait contenue dans ce plan. Le plan P (fig. 92) sépare l'espace en deux régions appelées *demi-espaces* (I) et (II). La droite Δ qui joint le point B du demi-espace I au point C du demi-espace II, *coupe* ou *perce* le plan P en A. Ce point A est l'*intersection* de la droite BC et du plan P, ou le *pied* de BC dans le plan P. La droite BC et le plan P sont *sécants* (comme une tige de fer rectiligne traversant une feuille de carton). Nous constatons de même qu'il est impossible de joindre par une ligne quelconque les points B et C sans traverser le plan P.

3° Nous verrons plus loin qu'une droite et un plan peuvent ne pas avoir de point commun (comme l'arête horizontale du tableau et le plancher), la droite est alors dite *parallèle* au plan.

En définitive, une droite est contenue dans un plan, sécante ou parallèle à ce plan.

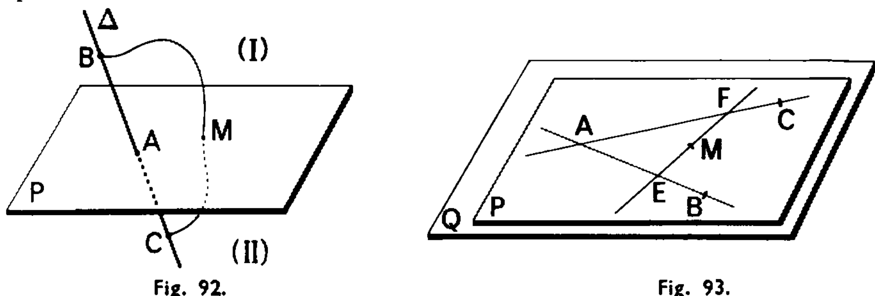


Fig. 92. Fig. 93.

110. Fait d'expérience. — Trois points A, B et C non alignés étant matérialisés par les extrémités de trois pointes, on constate qu'une feuille de carton peut reposer sur ces trois pointes. C'est pourquoi nous admettrons que par trois points non alignés, on peut faire passer un plan. Bien que la feuille de carton puisse encore glisser latéralement sur les trois pointes, le plan ainsi obtenu est unique, comme le prouve le théorème suivant.

111. Théorème. — *Par trois points non alignés on peut faire passer un plan et un seul.*

Supposons que deux plans P et Q contiennent les points non alignés A, B et C (fig. 93). Montrons qu'ils sont confondus.

Ils contiennent tous deux les droites AB et AC. Soit M un point *quelconque* du plan P. Dans ce plan, on peut construire une droite passant par M qui coupe respectivement AB et AC en E et F. Les points E et F situés sur les droites AB et AC du plan Q appartiennent à ce plan Q. Il en est de même de la droite EF tout entière, donc du point M. Tout point de l'un des plans appartient à l'autre. Les deux plans P et Q sont confondus.

112. Détermination d'un plan. — Le plan P défini par les trois points A, B, C, contient la droite AB et le point C extérieur à cette droite. Tout autre plan Q contenant la droite AB et le point C contient les points A, B, C, et est confondu avec le plan P (fig. 94).

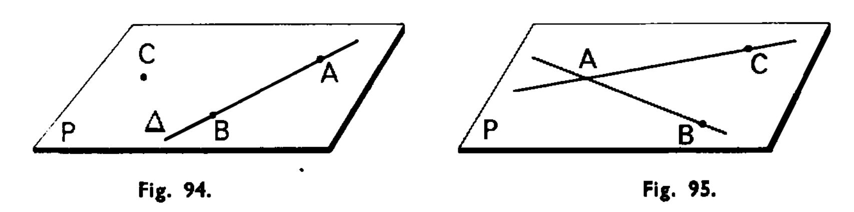


Fig. 94. Fig. 95.

Le plan P contient les droites concourantes AB et AC (fig. 95). Tout autre plan Q contenant ces droites contient les points A, B, C et est confondu avec le plan P.

Il en résulte qu'un plan est déterminé :

1° ***Par trois points non alignés.***

2° ***Par une droite et un point extérieur à cette droite.***

3° ***Par deux droites concourantes.***

On constatera qu'une feuille de carton peut reposer sur les deux côtés d'un angle matérialisé par les deux branches d'un compas, que la position d'une porte est déterminée par la ligne de ses gonds et un point du plancher.

113. Conséquences. — 1° En amenant les trois sommets d'une équerre sur le tableau, le plan de l'équerre et celui du tableau coïncident. On peut alors faire glisser l'équerre sur le tableau, leurs surfaces restant en coïncidence :

Deux plans sont superposables et un plan peut glisser sur lui-même, même après avoir été retourné face pour face.

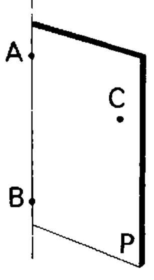


Fig. 96.

2° Il existe une infinité de positions pour une porte quand elle tourne autour de la ligne de ses gonds (fig. 96) :

Par une droite donnée, ou par deux points donnés, on peut faire passer une infinité de plans.

114. Générations du plan. — Une ligne mobile *engendre* une surface; une droite mobile *engendre* donc une surface à moins qu'elle ne glisse sur elle-même.

On peut engendrer un plan :

1° *En faisant pivoter une droite* Δ *autour du point fixe* A *de façon qu'elle rencontre une droite fixe* D (fig. 97).

En effet cette droite Δ appartient au plan déterminé par la droite D et le point A. C'est le cas de l'essuie-glace sur un pare-brise plan.

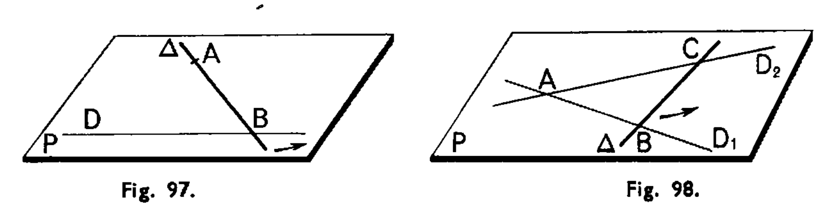


Fig. 97. Fig. 98.

2° *En déplaçant une droite* Δ *de manière qu'elle rencontre en deux points distincts deux droites concourantes données* D_1 *et* D_2 (fig. 98).

En effet cette droite Δ appartient au plan déterminé par D_1 et D_2. Cette propriété est utilisée par les cimentiers et les plâtriers pour dresser une surface plane.

115. Intersection de deux plans. — Deux faces planes contiguës d'un solide sont séparées par une arête rectiligne. Cela conduit à penser que deux plans ont en général une droite commune :

Théorème. — ***Lorsque deux plans distincts ont un point commun, ils se coupent suivant une droite passant par ce point.***

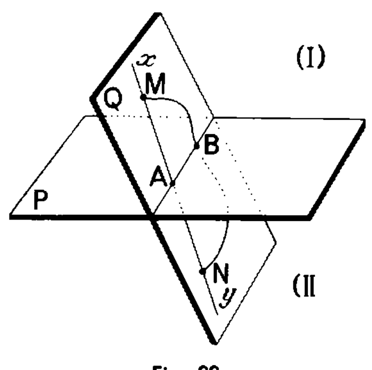


Fig. 99.

Considérons deux plans distincts P et Q ayant un point commun A (fig. 99). Menons dans le plan Q, une droite xy qui perce le plan P en A. Ce plan P partage l'espace en deux demi-espaces (I) et (II). Soient M et N deux points de xy appartenant respectivement aux régions (I) et (II). Une courbe quelconque du plan Q qui joint M à N sans passer par A coupe le plan P en B (n° 109), point commun aux plans P et Q. La droite AB est donc commune aux deux plans (n° 109, 1°). Ces deux plans n'ont pas

d'autre point commun en dehors de cette droite, sinon ils coïncideraient (n° 111). Les plans P et Q sont dits *sécants* et la droite AB est leur *intersection.*

116. Positions relatives de deux plans.

Deux plans peuvent être :

1° ***Confondus :*** lorsqu'ils ont trois points communs non alignés.
2° ***Sécants :*** s'ils sont distincts et ont un point commun.
3° ***Parallèles :*** lorsqu'ils n'ont aucun point commun (15e leçon).

Lorsque plusieurs plans distincts ont une droite Δ commune, ils sont dits *concourants suivant* Δ.

117. Positions relatives de deux droites de l'espace. — Soient deux droites D_1 et D_2 (fig. 100) et le plan P déterminé par D_1 et un point A de D_2 non situé sur D_1. Deux cas sont possibles :

1° Si le plan P contient la droite D_2, les droites D_1 et D_2 sont dans un même plan et sont donc *concourantes ou parallèles.* Elles sont dites *coplanaires.*

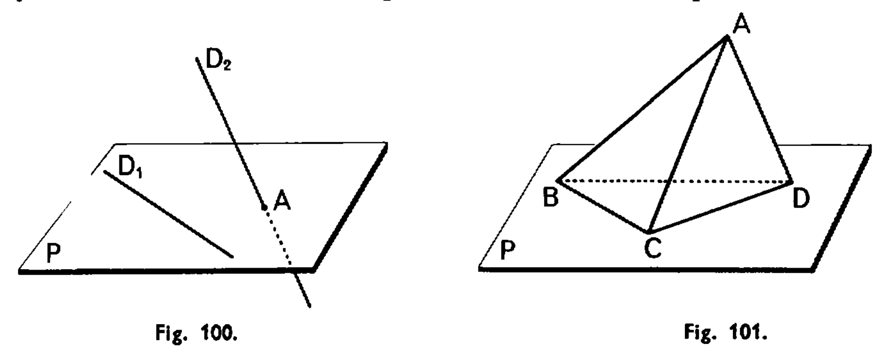


Fig. 100. Fig. 101.

2° Si le plan P ne contient pas la droite D_2, il la coupe en A. Les droites D_1 et D_2 ne peuvent être ni concourantes, ni parallèles sinon elles détermineraient un plan contenant A et D_1, donc confondu avec P, ce qui est impossible puisque P coupe D_2 en A. Les droites D_1 et D_2 ne sont pas situées dans un même plan. Elles sont dites *non coplanaires.* C'est en général le cas de deux droites quelconques de l'espace.

118. Tétraèdre. — ***Le tétraèdre est le solide limité par quatre faces planes triangulaires.***

Le tétraèdre ABCD (fig. 101) a quatre *sommets* : A, B, C et D, quatre *faces* : les triangles ABC, BCD, CDA et DAB, six *arêtes* : les côtés des triangles précédents. Deux arêtes telles que AB et CD n'appartenant pas à une même face sont dites *opposées* et de même la face BCD et le sommet A sont dit *opposés.*

EXERCICES

230. On considère quatre points A, B, C et D. Montrer qu'ils sont en général les sommets d'un tétraèdre. Quel est le nombre des plans contenant trois des points donnés? Déterminer les intersections de ces plans deux à deux.

231. On donne deux droites concourantes Ox et Oy dans un plan P. Une troisième droite D coupe Ox et Oy et n'appartient pas au plan P. Montrer qu'elle passe par O.

232. Les points A, B et C appartiennent à la fois aux plans sécants P et Q. Démontrer que les points A, B et C sont alignés suivant une même droite.

233. Trois plans distincts P, Q, R contiennent les points A et B. Démontrer que les plans P, Q et R sont concourants.

234. On donne trois demi-droites concourantes Ox, Oy, Oz n'appartenant pas à un même plan.

1° Dénombrer les plans contenant deux de ces droites. Quel est leur point commun?

2° Un plan P coupe Ox, Oy, Oz respectivement en A, B et C. Que représente la figure OABC?

235. 1° Les plans P et Q se coupent suivant la droite D. Un troisième plan R coupe la droite D en O. Les trois plans P, Q, R ont-ils un point commun?

2° En déduire que trois plans donnés ont en général un point commun et un seul.

236. Soient trois droites concourantes Ox, Oy, Oz non situées dans un même plan. Un plan P les coupe respectivement en A, B et C. Un plan Q les coupe respectivement en A', B' et C'. Enfin les plans P et Q se coupent suivant une droite D. Montrer que les intersections des droites AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C' sont alignées.

237. Trois plans P, Q et R sont concourants suivant une droite D. Un plan S coupe la droite D en O. Montrer que les intersections du plan S avec les plans P, Q et R sont trois droites d'un même plan concourant en O.

238. On donne deux droites D_1 et D_2 concourantes en O et un point quelconque M.

1° Quelle est l'intersection Δ des plans déterminés par M et D_1 d'une part, par M et D_2 d'autre part.

2° Si M décrit une droite ne passant pas par O, quelle est la figure engendrée par la droite Δ?

239. On donne deux droites quelconques D_1 et D_2 ainsi qu'un point A extérieur à ces droites. Soit P et Q les plans déterminés respectivement par A et D_1 et par A et D_2.

1° Montrer que les plans P et Q se coupent suivant une droite passant par A.

2° En déduire qu'il existe en général une droite passant par A et rencontrant les droites D_1 et D_2.

240. On donne un tétraèdre ABCD, un point E sur AB, un point F sur AC, un point G sur BD. On suppose que EF et BC ne sont pas parallèles.

1° Construire l'intersection des plans EFG et BCD.

2° Construire l'intersection de la droite CD et du plan EFG.

241. Dans un tétraèdre ABCD, montrer que les plans suivants sont concourants :

1° Les plans déterminés par A et chaque médiane du triangle BCD.

2° Les plans déterminés par A et chaque hauteur du même triangle.

3° Les plans déterminés par A et chaque bissectrice intérieure du même triangle.

DROITES PARALLÈLES

119. Définition. — ***Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont dans un même plan et n'ont aucun point commun.***

Pour établir que les droites D_1 et D_2 sont parallèles (fig. 102) il faut montrer :

1° qu'elles sont situées dans un même plan P;

2° qu'elles n'ont pas de point commun.

Notons que deux droites non situées dans un même plan, n'ont aucun point commun mais ne sont pas parallèles. D'autre part, si D_1 et D_2 sont parallèles, le plan P déterminé par D_1 et un point A de D_2 contient D_2 :

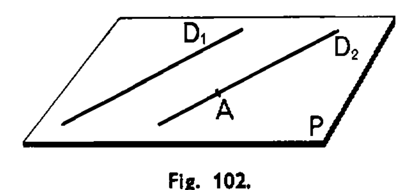


Fig. 102.

Deux droites parallèles déterminent un plan.

Ce plan peut être engendré par une droite Δ qui se déplace en s'appuyant sur les deux droites parallèles D_1 et D_2.

120. Théorème I. — ***Par un point extérieur à une droite, on peut mener une parallèle à cette droite et une seule.***

Toute parallèle à D_1 passant par A (fig. 102) est contenue dans le plan *unique* P déterminé par la droite D_1 et le point A. Et, dans ce plan P on peut mener par A, une parallèle à D_1 et une seule d'après le postulat d'Euclide.

121. Théorème II. — *Quand deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.*

Les droites D_1 et D_2 sont parallèles (fig. 103) et le plan P coupe D_1 en A. Il faut montrer que D_2 coupe le plan P.

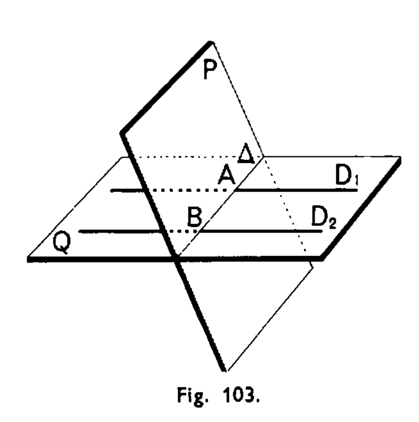


Fig. 103.

Les droites D_1 et D_2 déterminent un plan Q (n° 119). Les plans P et Q ont en commun le point A et sont distincts puisque D_1 n'est pas dans P. Ces deux plans se coupent suivant une droite Δ passant par A et distincte de D_1. Dans le plan Q, la droite Δ, coupant D_1 en A coupe aussi D_2 parallèle à D_1 en B, point commun à la droite D_2 et au plan P. C'est leur seul point commun, sinon D_2 serait dans le plan P et il en serait de même de D_1, parallèle à D issue de A. Donc la droite D_2 coupe le plan P en B.

122. Théorème III. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Les droites D_1 et D_2 sont parallèles à D_3 (fig. 104). Il faut montrer que D_1 et D_2 sont parallèles. On pourra avoir une idée de la figure en considérant les arêtes latérales d'un prisme triangulaire droit.

1° D_1 *et* D_2 *sont dans un même plan :* Si le plan P déterminé par D_1 et un point quelconque A de D_2 coupait D_2 en A, il couperait D_3 en B (n° 121). Il couperait D_1 parallèle à D_3, ce qui est impossible puisque P contient D_1. Ce plan P qui contient un point A de D_2, et qui ne la coupe pas, contient donc D_2. Les droites D_1 et D_2, sont dans le plan P.

2° D_1 *et* D_2 *n'ont pas de point commun* car s'ils en avaient un O, on pourrait mener par O deux parallèles D_1 et D_2 à la droite D_3, ce qui est impossible (n° 120).

Les droites D_1 et D_2 sont parallèles. On dit que les droites D_1, D_2 et D_3 ont même *direction.*

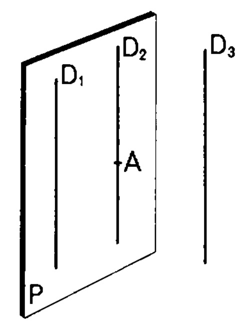


Fig. 104.

ANGLE DE DEUX DROITES

123. Théorème. — ***Deux angles de l'espace qui ont leurs côtés parallèles et de même sens sont égaux.***

Les angles xOy et $x'O'y'$ sont tels que $O'x'$ et $O'y'$ soient parallèles respectivement à Ox et à Oy et de même sens (fig. 105). (On pourra avoir une idée de la figure en considérant deux angles à côtés parallèles appartenant aux deux bases d'un prisme triangulaire). Portons sur Ox et $O'x'$ deux segments égaux : $OA = O'A'$. De même, portons sur Oy et $O'y'$ deux segments égaux : $OB = O'B'$.

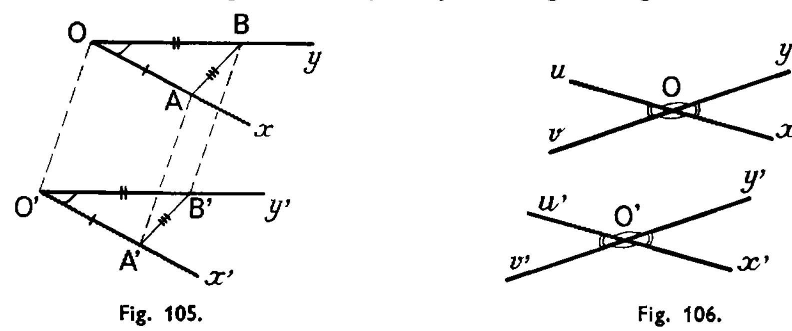


Fig. 105. Fig. 106.

Les segments OA et OA′ sont parallèles, égaux, de même sens ainsi que les segments OB et O′B′. Les quadrilatères OAA′O′ et OBB′O′ sont donc des parallélogrammes. Les segments AA′ et OO′ d'une part, BB′ et OO′ d'autre part, sont donc parallèles, égaux et de même sens. Les segments AA′ et BB′ sont parallèles (nº 122), égaux et de même sens et la figure ABB′A′ est un parallélogramme. Donc AB = A′B′. Les triangles OAB et O′A′B′ ont leurs trois côtés respectivement égaux. Il sont égaux (3ᵉ cas). Il en résulte que les angles AOB et A′O′B′ sont égaux.

124. Corollaires. — 1º *Lorsque deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles et de sens contraires, ils sont égaux.*

2º *Lorsque deux angles ont deux côtés parallèles et de même sens et les deux autres parallèles et de sens contraires, ils sont supplémentaires.*

En effet, considérons deux droites ux et vy se coupant en O et leurs parallèles respectives $u'x'$ et $v'y'$ se coupant en O′ (fig. 106). Nous obtenons :

$\widehat{u'O'v'} = \widehat{x'O'y'}$ (opposés par le sommet) et $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$ (nº 123).

Donc $\widehat{u'O'v'} = \widehat{xOy}$. Puis $\widehat{v'O'x'} + \widehat{x'O'y'} = 2^D$; donc : $\widehat{v'O'x'} + \widehat{xOy} = 2^D$.

125. Définition. — ***On appelle angle de deux droites de l'espace l'un des angles obtenus en menant par un point quelconque les parallèles à ces deux droites.***

Menons par le point O les parallèles d_1 et d_2 aux droites D_1 et D_2 (fig. 107). La mesure des quatre angles ainsi formés en O, deux à deux égaux ou supplémentaires, est indépendante du sommet O choisi (nº 123). L'un de ces quatre angles (de préférence l'angle aigu) mesure, par définition, l'angle des droites D_1 et D_2.

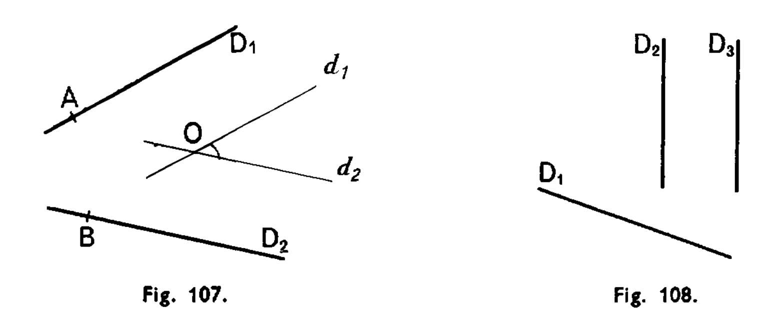


Fig. 107. Fig. 108.

Si nous considérons deux demi-droites AD_1 et BD_2 (fig. 107) et les demi-droites Od_1 et Od_2 respectivement parallèles aux premières et de même sens, l'angle d_1Od_2 définit, sans ambiguïté, l'angle des demi-droites AD_1 et BD_2. Notons que :

1º Le sommet O étant arbitraire, ce point peut être choisi sur l'une des droites D_1 ou D_2.

2º On ne change pas l'angle de deux droites D_1 et D_2 en remplaçant l'une d'elles, D_2 par exemple, par une parallèle D_3 à cette droite (fig. 108).

126. Droites orthogonales. — ***Deux droites sont orthogonales lorsque leur angle est droit.***

Les parallèles d_1 et d_2 aux droites D_1 et D_2 (fig. 107) forment alors au point O quatre angles droits.

Dans un parallélépipède rectangle d'arêtes latérales AA', BB', CC' et DD' (fig. 109), c'est le cas des droites AA' et BC.

Nous conviendrons d'appeler *perpendiculaires* deux droites à la fois orthogonales et concourantes. Notons que :

Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

En effet si les droites D_2 et D_3 sont parallèles elles font des angles égaux avec une droite donnée D_1 (nº 125, 2º). En particulier, si l'un de ces angles est droit, il en est de même de l'autre.

EXERCICES

242. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles à la droite D_3 et ces trois droites ne sont pas dans un même plan. Montrer qu'il n'existe aucune droite rencontrant les trois droites données.

243. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles et la droite D_3 coupe le plan $(D_1\ D_2)$. Montrer qu'il existe une infinité de droites rencontrant les trois droites données.

244. Les droites D_1 et D_2 d'un plan P sont parallèles. Les droites D_3 et D_4 percent respectivement le plan P en A et B. Montrer qu'il existe en général une droite et une seule rencontrant les quatre droites données.

245. On donne deux droites parallèles D_1 et D_2 d'un plan P et un point O extérieur au plan P.

1° Montrer que la parallèle à D_1 issue de O, est dans les plans déterminés par O et D_1 d'une part, par O et D_2 d'autre part.

2° Que peut-on dire de l'intersection de ces deux plans?

246. Dans un tétraèdre ABCD, on désigne par I, J et K les milieux respectifs des arêtes BC, AD et AC.

1° Montrer que les angles I et J du triangle KIJ mesurent les angles respectifs de IJ avec les arêtes AB et CD du tétraèdre.

2° Montrer que si AB = CD ces angles sont égaux. La réciproque est-elle vraie?

247. Sur les arêtes AB, AC et AD d'un tétraèdre ABCD on construit les points B', C' et D' tels que : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = k$.

1° Montrer que les triangles B'C'D' et BCD sont semblables.

2° Quelles sont les figures décrites par les milieux des côtés du triangles B'C'D' lorsque le nombre k varie?

248. Soient I, J, K, L, M et N les milieux des arêtes AB, AC, AD, BC, CD et BD d'un tétraèdre ABCD.

1° Montrer que les quadrilatères IKML, IJMN et JKNL sont des parallélogrammes.

2° En déduire que les segments IM, JN et KL ont même milieu.

DROITE ET PLAN PARALLÈLES

127. Définition. — ***Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun.***

L'arête A'B' et le plan de la face ABCD du parallélépipède rectangle de la figure 109 donnent la notion de droite parallèle à un plan.

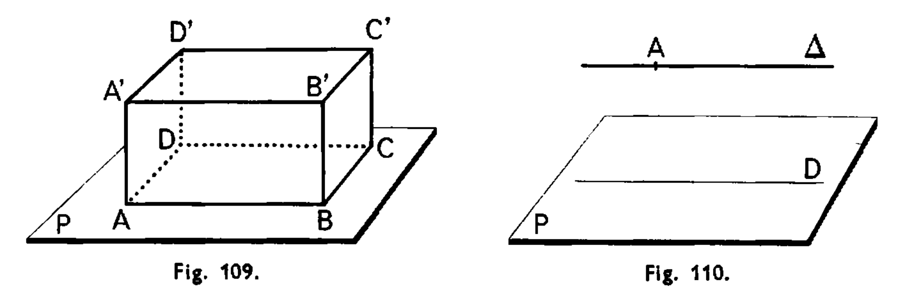


Fig. 109.

Fig. 110.

128. Théorème I. — ***Toute droite, non contenue dans un plan et parallèle à une droite de ce plan, est parallèle à ce plan.***

Par le point A, extérieur au plan P (fig. 110), menons la parallèle Δ à la droite D du plan P. Il faut montrer que Δ et P n'ont aucun point commun.

Le plan P ne contient pas la droite Δ puisqu'il ne contient pas le point A. Si le plan P coupait la droite Δ, il couperait aussi D parallèle à Δ (n° 121), ce qui est impossible puisqu'il contient D. La droite Δ et le plan P n'ayant pas de point commun sont parallèles. Il en résulte que :

1° Pour construire par le point A une parallèle au plan P, on construit dans le plan P une droite arbitraire D et on mène par A la parallèle Δ à la droite D.

2° Si la droite D change de direction dans P, il en est de même de sa parallèle Δ.

Par un point A *on peut mener une infinité de parallèles au plan* P.

3° Si le point A est dans le plan P, il en est de même de la droite Δ. Une droite d'un plan P apparaît comme cas particulier d'une parallèle à ce plan lorsque l'un des points de cette parallèle vient se placer dans le plan P.

129. Théorème II. — ***Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle aux intersections de ce plan avec tous ceux qui la contiennent.***

Soit une droite Δ parallèle au plan P (fig. 111). Soit Q le plan déterminé par Δ et un point quelconque O du plan P. Les plans P et Q sont distincts et ont le point O en commun. Ils se coupent suivant une droite D. Les droites D et Δ sont dans un même plan Q. Elles ne peuvent se couper, sinon leur intersection appartiendrait à la fois à la droite Δ et au plan P, ce qui est contraire à l'hypothèse. La droite D est donc parallèle à Δ.

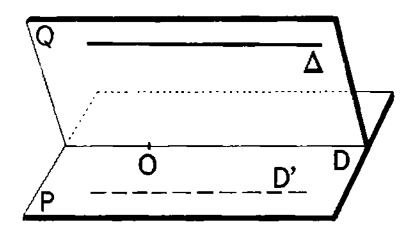


Fig. 111.

En faisant tourner le plan Q autour de Δ, on obtiendra une infinité de droites du plan P parallèles à Δ, donc parallèles entre elles.

130. Corollaire. — La droite D passant par le point O est parallèle à la droite Δ (fig. 111). C'est la seule parallèle à Δ issue de O (n° 120). Donc :

Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à cette droite menée par un point quelconque du plan est située dans ce plan.

131. Autre énoncé. — ***Pour qu'une droite non contenue dans un plan soit parallèle à ce plan, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.***

Cet énoncé unique traduit simultanément les théorèmes I et II (nos 128 et 129) sous une forme condensée plus facile à retenir.

132. Droite parallèle à deux plans sécants. — C'est le cas de l'arête AA′ et des faces BCC′B′, DCC′D′ du parallélépipède rectangle de la figure 109.

THÉORÈME. — ***Lorsqu'une droite est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur intersection.***

Soient deux plans P et Q parallèles à la droite D (fig. 112). Si par un point O de l'intersection Δ des plans P et Q on mène la parallèle à la droite D, elle est contenue à la fois dans les plans P et Q (nº 130). C'est donc leur intersection.

Il en résulte que :

Lorsque deux plans sécants sont issus de deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces deux droites.

C'est le cas des plans P et Q (fig. 112) issus respectivement des deux parallèles D_1 et D car leur intersection Δ est parallèle à la direction D et D_1 et D_2.

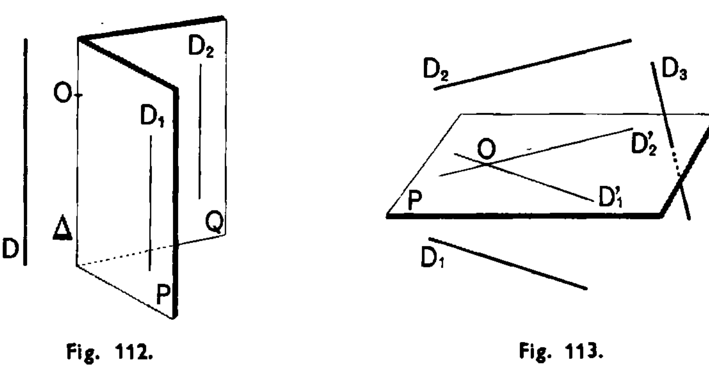


Fig. 112. Fig. 113.

133. Plan parallèle à deux droites. — ***Par un point donné, on peut mener un plan et un seul parallèle à deux droites données non parallèles entre elles.***

Tout plan parallèle aux droites D_1 et D_2 et passant par O (fig. 113), doit contenir les parallèles D'_1 et D'_2 menées par O aux droites D_1 et D_2 (nº 130). Le plan P déterminé par les droites D'_1 et D'_2 est parallèle à D_1 et à D_2 (nº 128). C'est le plan unique répondant à la question. Si les droites D_1 et D_2 étaient parallèles, les droites D'_1 et D'_2 seraient confondues et tout plan passant par D'_1 répondrait à la question.

134. Nouvelle génération du plan. — Supposons que le point O soit un point variable sur la droite D_1 (fig. 114). Lorsque ce point O décrit la droite D_1, la droite D'_2 issue de O et parallèle à D_2 reste dans le plan unique P, issu d'un point donné de D_1 et parallèle aux deux directions D_1 et D_2. Donc :

Par une droite donnée on peut mener un plan et un seul parallèle à une seconde droite non parallèle à la première.

D'autre part :

Une droite variable Δ parallèle à une direction donnée D_2 et rencontrant une droite donnée D_1 engendre le plan issu de D_1 et parallèle à D_2.

On obtient ainsi un nouveau procédé de génération d'un plan car tout point M du plan appartient à une position de la droite variable Δ (fig. 114).

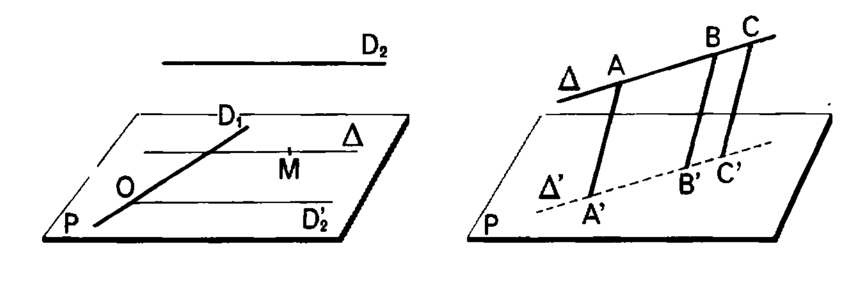


Fig. 114. Fig. 115.

135. Théorème. — *Les portions de parallèles comprises entre une droite et un plan parallèles sont des segments égaux.*

Considérons une droite Δ parallèle au plan P (fig. 115) et deux segments parallèles AA' et BB' rencontrant respectivement Δ en A et B, le plan P en A' et B'. Ces segments déterminent un plan qui coupe le plan P suivant A'B' parallèle à AB (nº 129). Le quadrilatère AA'B'B est donc un parallélogramme et AA' = BB'.

136. Exercice. — *Démontrer que la section d'un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées est un parallélogramme.*

Par le point E de l'arête AC menons le plan P parallèle à la fois aux arêtes AB et CD (fig. 116). Il coupe les arêtes BC, BD et AD respectivement en F, G et H. La droite AB étant parallèle au plan P, les plans ABC et ABD coupent ce plan suivant EF et GH parallèles à AB (nº 129), donc parallèles entre elles. De même, la droite CD étant parallèle au plan P, les plans CDA et CDB coupent ce plan suivant EH et FG parallèles entre elles. Le quadrilatère EFGH est donc un parallélogramme. C'est en particulier un rectangle si l'angle FEH est droit, c'est-à-dire si AB et CD sont orthogonales.

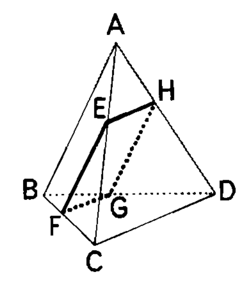


Fig. 116.

EXERCICES

249. On donne deux plans sécants P et Q et un point O. Comment construire par ce point une droite parallèle aux plans P et Q?

250. Deux plans sécants P et Q sont tels qu'une droite D_1 de l'un est parallèle à une droite D_2 de l'autre. Montrer que l'intersection des plans P et Q est parallèle aux droites D_1 et D_2.

251. On donne deux plans P et Q qui se coupent suivant la droite D. Par un point O donné on mène la parallèle D' à D et une droite Δ qui coupe les plans P et Q en A et B. Montrer que les intersections des plans P et Q avec le plan R déterminé par D' et Δ sont parallèles à D.

252. Montrer que trois plans P, Q, R menés par un point O et parallèles à une droite D sont concourants suivant une même droite.

253. Les droites D_1 et D_2 sont quelconques et la droite Δ n'est parallèle ni à D_1 ni à D_2. Par un point A de D_1 et par un point B de D_2 on mène les droites D'_1 et D'_2 parallèles à Δ.

1° Montrer que les plans P et Q déterminés respectivement par D_1 et D'_1 puis par D_2 et D'_2 sont parallèles à Δ.

2° Montrer que l'intersection des plans P et Q, si elle existe, est une droite parallèle à Δ et qui coupe les droites D_1 et D_2.

254. On donne un triangle OAB dans un plan P. Par A et B on mène deux droites parallèles D_1 et D_2 sécantes au plan P. Par O on mène la parallèle xy à AB et par cette droite on construit un plan Q qui coupe D_1 en M et D_2 en N.

1° Montrer que AMNB est un parallélogramme.

2° Comment se déplace le centre de ce parallélogramme lorsque le plan Q pivote autour de xy?

255. On donne une droite D_1 parallèle à un plan P, une droite D_2 contenue dans le plan P et non parallèle à D_1, une droite Δ sécante au plan P. Par un point M de D_1 on mène la parallèle à Δ. Elle coupe le plan P en M'.

1° Quand le point M décrit la droite D_1 quelle est la figure décrite par le point M'?

2° Construire une droite parallèle à Δ et rencontrant D_1 et D_2.

256. Les arêtes opposées AB et CD du tétraèdre ABCD sont orthogonales et mesurent respectivement 15 cm et 18 cm. Par un point M situé au tiers de l'arête AC à partir de C on mène le plan parallèle à la fois aux arêtes AB et CD.

1° Montrer qu'il coupe le tétraèdre suivant un rectangle.

2° Évaluer le périmètre de ce rectangle, sa diagonale et sa surface.

PLANS PARALLÈLES

137. Définition. — ***Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun.***

Les plans des bases d'un parallélépipède rectangle en donnent la notion (fig. 109). Le théorème suivant en prouve l'existence.

138. Théorème I. — ***Deux plans distincts sont parallèles lorsque l'un d'eux contient deux droites concourantes parallèles à l'autre.***

Par le point O′ extérieur au plan P (fig. 117), menons les droites D′ et Δ′ respectivement parallèles aux droites D et Δ du plan P, *concourantes* en O. Les droites distinctes D′ et Δ′ sont parallèles au plan P (n° 128) et déterminent un plan P′. Si ce plan P′ coupait le plan P l'intersection serait une droite parallèle à la fois à D′ et à Δ′ (n° 129), ce qui est impossible puisque D′ et Δ′ sont concourantes. Donc les plans P et P′ sont parallèles.

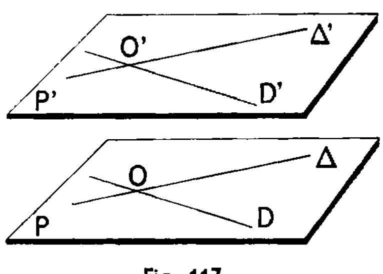


Fig. 117.

139. Théorème II. — ***Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.***

En effet si les plans P et P′ sont parallèles (fig. 117) une droite quelconque D′ du plan P′ ne peut couper le plan P car le point d'intersection de D′ et P′ serait commun aux plans P et P′.

140. Remarque. — ***Pour que deux plans distincts soient parallèles, il faut et il suffit que deux droites concourantes de l'un soient parallèles à l'autre,***

Cet énoncé unique traduit simultanément sous une forme plus condensée les théorèmes I et II des paragraphes précédents.

141. Théorème. — ***Par un point extérieur à un plan, on peut construire un plan parallèle au premier et un seul.***

1° Il résulte du n° 138 que, pour construire par un point O′, un plan P′ parallèle au plan P (fig. 117), il suffit de mener par O′ les droites D′ et Δ′ respectivement parallèles aux droites concourantes D et Δ du plan P.

2° *Ce plan* P′ *est unique :* Supposons qu'il en existe un autre P″. Ce plan P″ contient la droite D′ car s'il la coupait en O′ il couperait la droite D parallèle à D′ (n° 121), donc il couperait le plan P. De même, le plan P″ contient Δ′. Il est donc confondu avec le plan P′.

142. Corollaires. — ***Lorsque deux plans sont parallèles :***

1° ***Tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.***

2° ***Tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.***

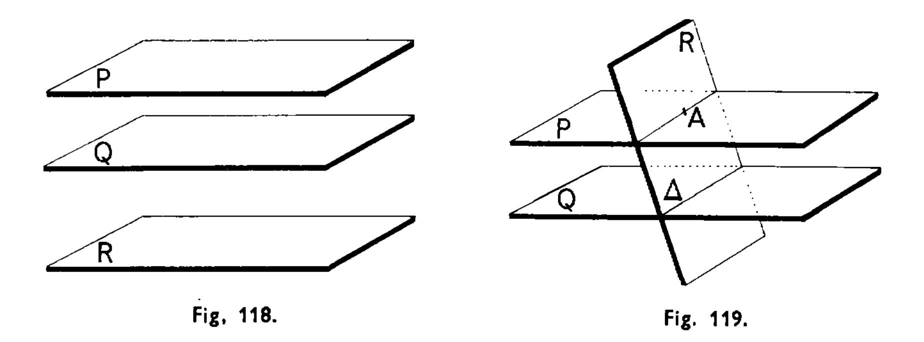


Fig. 118. Fig. 119.

Soient P et Q deux plans parallèles :

1° Montrons que, lorsque le plan R est parallèle au plan P (fig. 118), il est également parallèle au plan Q. En effet, si les plans Q et R se coupaient, on pourrait, par un point O de leur intersection, mener deux plans parallèles au plan P, ce qui est impossible (n° 141). Les plans P, Q, R sont deux à deux parallèles. On dit qu'ils sont *parallèles* ou qu'ils ont *même direction.*

2° Lorsque le plan R coupe le plan P (fig. 119), il coupe aussi le plan Q, sinon, par un point commun A aux plans P et R, passeraient deux plans parallèles au plan Q.

Les intersections D et Δ du plan R avec les plans P et Q sont deux droites d'un même plan R. Elles n'ont pas de point commun car ce point appartiendrait à la fois aux plans P et Q qui sont parallèles. Les droites D et Δ sont donc parallèles.

143. Théorème. — ***Les différentes parallèles à un plan donné issues d'un point fixe, engendrent le plan passant par ce point et parallèle au plan donné.***

Soit Q le plan parallèle au plan donné P et passant par le point O (fig. 120) :

1° Toute droite Ox du plan Q est parallèle au plan P (n° 139).

2° Réciproquement, toute droite Oy passant par O et parallèle au plan P détermine avec Ox un plan parallèle au plan P (n° 138), donc confondu avec le plan Q (n° 141). Lorsque Oy tourne autour de O en restant parallèle à P elle engendre le plan Q. C'est un nouveau mode de génération du plan.

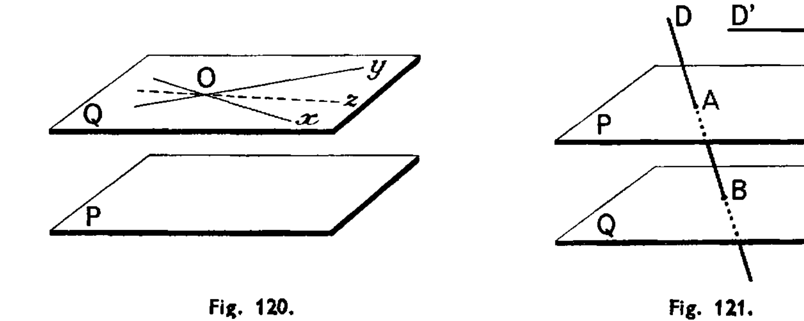


Fig. 120. Fig. 121.

144. Corollaires. — ***Lorsque deux plans sont parallèles :***

1° ***Toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.***

2° ***Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.***

Soient P et Q deux plans parallèles (fig. 121) :

1° Si la droite D coupe le plan P en A, cette droite passant par un point A extérieur au plan Q, n'est pas contenue dans le plan Q. Elle n'est pas non plus parallèle au plan Q, sinon elle appartiendrait au plan P d'après le théorème précédent (n° 143). La droite D coupe donc le plan Q en un certain point B.

2° Si la droite D' est parallèle au plan P, elle ne peut couper le plan Q, sans quoi elle couperait aussi le plan P, d'après ce qui précède. Elle est donc parallèle au plan Q ou contenue dans ce plan.

145. Théorème. — *Les portions de droites parallèles comprises entre deux plans parallèles sont des segments égaux.*

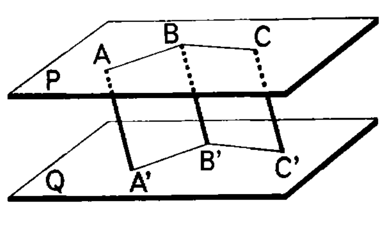


Fig. 122.

Les plans P et Q sont parallèles (fig. 122) et découpent sur des sécantes parallèles les segments AA', BB' et CC'. Les droites parallèles AA' et BB' sont dans un même plan qui coupe les plans parallèles P et Q suivant deux droites parallèles AB et A'B' (nº 142). Le quadrilatère BB'A'A est donc un parallélogramme et AA' = BB'. De même AA' = CC'. Donc : AA' = BB' = CC'.

146. Théorème. — *Plusieurs plans parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.*

Considérons trois plans parallèles P, Q et R (fig. 123) coupés en A, B, C par la sécante Δ, en A', B', C' par la sécante Δ'. Menons par le point A', la sécante Δ_1 parallèle à Δ. Elle coupe les plans Q et R en B_1 et C_1 et (nº 145) :

$$AB = A'B_1; \quad BC = B_1C_1 \text{ et } AC = A'C_1.$$

Les droites Δ' et Δ_1, sécantes en A', déterminent un plan qui coupe les plans Q et R suivant deux parallèles $B'B_1$ et $C'C_1$ (nº 142). Appliquons le théorème de Thalès aux sécantes Δ' et Δ_1 et aux parallèles $B'B_1$ et $C'C_1$:

$$\frac{A'B'}{A'B_1} = \frac{B'C'}{B_1C_1} = \frac{A'C'}{A'C_1},$$

donc : $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \cdots \quad (1)$$

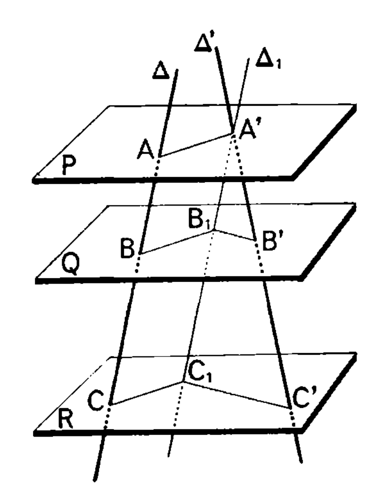


Fig. 123.

Si les droites Δ et Δ' sont orientées, le théorème subsiste pour les mesures algébriques des vecteurs correspondants $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$, $\vec{BC}$ et $\vec{B'C'}$, etc... car les nombres $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$... sont de même signe et il en est de même des nombres $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{A'C'}$... et la suite d'égalités (1) entraîne :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \cdots \quad (2)$$

EXERCICES

257. On donne deux plans parallèles P et Q. Par un point O non situé dans ces plans, on mène trois droites, non situées dans un même plan, rencontrant respectivement les plans P et Q en A, B, C et A', B', C'. Montrer que les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

258. On donne un plan P, un point O et une droite D non parallèle à P. Construire une droite passant par O, parallèle au plan P et qui coupe la droite D.

259. Deux plans P et Q sont parallèles. Deux plans P' et Q' sont parallèles mais coupent les plans P et Q. Montrer que les intersections des plans P et P', P et Q', Q et P', Q et Q' sont parallèles.

260. On considère un tétraèdre SABC dans lequel SA = SB = SC. On construit les bissectrices extérieures des angles en S des triangles SAB, SAC et SBC. Montrer qu'elles appartiennent au plan mené par S et parallèle au plan ABC.

261. On donne deux droites quelconques D_1 et D_2. Par un point A de D_1 on mène la parallèle à D_2, et par un point B de D_2, la parallèle à D_1. Montrer qu'on détermine ainsi deux plans parallèles passant l'un par D_1, l'autre par D_2.

262. On considère trois droites concourantes Ox, Oy, Oz non dans un même plan.
1° Construire par un point A le plan parallèle aux droites Ox et Oy. Montrer que la droite Oz coupe le plan obtenu.
2° En déduire qu'en général on ne peut mener par un point un plan parallèle à trois droites données.

263. On donne un parallélogramme ABCD et un plan P. Les parallèles menées par A, B, C, D à une direction donnée coupent P respectivement en A', B', C' D'.
1° Que peut-on dire des plans ABA'B' et CDC'D'?
2° Montrer que le quadrilatère A'B'C'D' est un parallélogramme.

264. On donne un plan P et un point O extérieur à P. Une droite issue de O coupe le plan P en M. Lorsque le point M décrit le plan P, montrer que le milieu M' de OM décrit un plan P' parallèle à P.

265. Deux droites D_1 et D_2 coupent le plan P en A et B. Un plan Q parallèle au plan P coupe respectivement D_1 et D_2 en M et N.
1° Montrer que MN est parallèle au plan P.
2° On prolonge AM d'un segment MM' = AM et BN du segment NN' = BN. Montrer que la droite M'N' est parallèle au plan P.

DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES

147. Expérience. — Ouvrons un cahier. Disposons-le sur le plan P de la table comme le montre la figure 124. Les différentes pages du cahier sont des rectangles ayant un côté commun AB et dont les côtés BC, BD... s'appuient sur le plan de la table. Nous réalisons ainsi une droit AB perpendiculaire à toutes les droites du plan P, issues du point B.

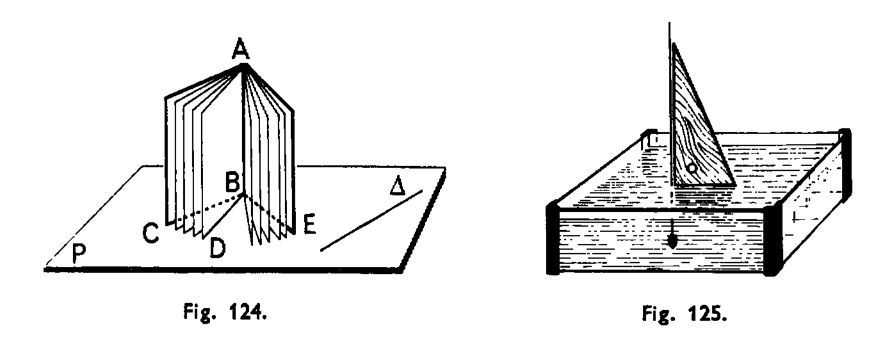


Fig. 124.

Fig. 125.

Toute droite Δ tracée dans P est orthogonale à AB car la parallèle Δ' à Δ menée par B est située dans P et perpendiculaire à AB. D'où la définition suivante :

148. Définition. — ***Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.***

Le plan d'une nappe d'eau au repos, donc *horizontal*, et la direction de la *verticale* donnée par un fil à plomb donnent la notion d'une droite et d'un plan perpendiculaires (fig. 125). Le théorème suivant justifie la vérification expérimentale de la figure 124.

149. Théorème. — ***Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.***

Soit une droite Δ perpendiculaire en O aux droites concourantes O*x* et O*y* du plan P (fig. 126) et soit O*z* une droite quelconque issue de O dans le plan P.

Prenons sur Δ deux segments égaux OA = OA′ et menons dans le plan P une sécante coupant O*x* en B, O*y* en C et O*z* en M. Les droites O*x* et O*y* sont deux médiatrices de AA′. Donc : BA = BA′ et CA = CA′. Les triangles ABC et A′BC ayant BC commun, ont donc leurs trois côtés respectivement égaux. Ils sont égaux (troisième cas d'égalité) et s'appliquent l'un sur l'autre en faisant tourner le demi-plan A′BC autour de BC pour l'amener sur le demi-plan ABC. Les points B, C et M restent fixes, le point A′ vient en A et le segment MA′ vient sur MA. Donc : MA′ = MA. La droite OM, médiane du triangle isocèle MAA′ est aussi hauteur. La droite Δ est par conséquent perpendiculaire à O*z*.

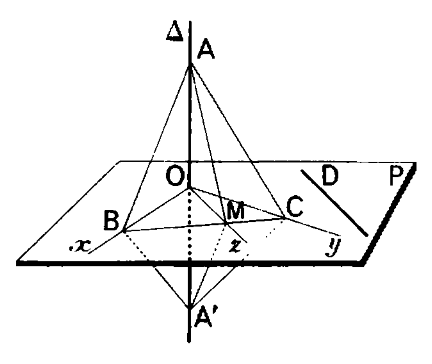


Fig. 126.

Toute droite D du plan P (ou parallèle au plan P) est orthogonale à Δ car sa parallèle O*z* issue de O, est une droite du plan P, perpendiculaire à Δ.

150. Théorème. — ***Lorsqu'une droite est orthogonale à deux droites concourantes d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.***

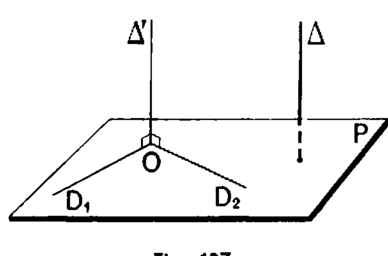


Fig. 127.

Considérons une droite Δ orthogonale à deux droites D_1 et D_2 du plan P, concourantes en O (fig. 127). La parallèle Δ′ à Δ menée par O est perpendiculaire à D_1 et à D_2 (nº 125). Cette droite Δ′ est orthogonale à toutes les droites du plan P d'après le théorème précédent. Il en est de même de Δ parallèle à Δ′ (nº 126). Donc Δ est perpendiculaire au plan P.

REMARQUE. — Une droite d'un plan P (ou une parallèle à ce plan), ne peut être perpendiculaire à deux droites concourantes du plan. Il en résulte que toute perpendiculaire à un plan P coupe ce plan.

151. Conséquences. — 1° Le théorème précédent (n° 150) et la définition du n° 148 conduisent à l'énoncé suivant :

Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites concourantes de ce plan.

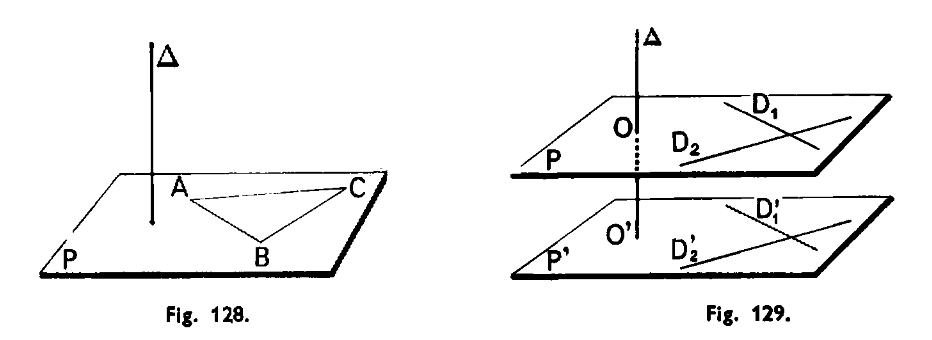


Fig. 128. Fig. 129.

2° Si Δ est orthogonale aux côtés AB et AC du triangle ABC (fig. 128), elle est perpendiculaire au plan du triangle (n° 150), donc orthogonale à BC.

Lorsqu'une droite est orthogonale à deux côtés d'un triangle elle est orthogonale au troisième.

Il en résulte que :

$$\left.\begin{matrix}\Delta \perp AB \\ \Delta \perp AC\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta \perp BC.$$

3° Si le plan P est perpendiculaire à Δ', il l'est aussi à sa parallèle Δ (fig. 127)

Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

4° Soient deux plans parallèles P et P' (fig. 129) et deux droites concourantes D_1 et D_2 du plan P parallèles aux droites D'_1 et D'_2 du plan P'. Si la droite Δ est perpendiculaire au plan P, elle est orthogonale à D_1 et D_2, donc à D'_1 et D'_2. Elle est perpendiculaire au plan P' :

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

On dit que la direction de la droite Δ est perpendiculaire à la direction du plan P. Il en est ainsi de la direction des droites verticales et de la direction des: plans horizontaux.

152. Théorème. — ***Par un point donné on peut mener un plan et un seul, perpendiculaire à une droite donnée.***

1° **Le point O est sur la droite Δ.** — Dans deux plans distincts Q et R passant par Δ (fig. 130) menons respectivement O*x* et O*y* perpendiculaires à Δ. Le plan P défini par O*x* et O*y* est perpendiculaire à Δ (n° 150).

Ce plan est *unique :* tout autre plan P, perpendiculaire en O à Δ, couperait le plan Q suivant une perpendiculaire à Δ, soit O*x*. De même il couperait le plan R suivant O*y* et serait donc confondu avec le plan P.

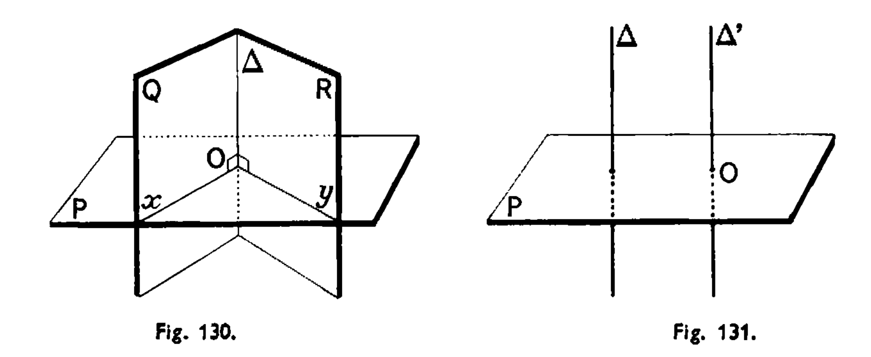


Fig. 130.

Fig. 131.

2° **Le point O est extérieur à Δ.** — Menons par O (fig. 131) la droite Δ′ parallèle à Δ. Tout plan perpendiculaire à l'une des droites Δ ou Δ′ est perpendiculaire à l'autre. Le plan unique P perpendiculaire à Δ′ en O est le plan cherché.

153. Corollaire. — ***Deux plans distincts perpendiculaires à une même droite sont parallèles.***

En effet, s'ils avaient un point commun O, on pourrait mener par ce point deux plans perpendiculaires à une même droite, ce qui est impossible.

Ainsi les plans des parallèles terrestres, perpendiculaires à la ligne des pôles, sont parallèles au plan de l'équateur.

154. Théorème. — ***Par un point donné on peut mener une perpendiculaire et une seule à un plan donné.***

1° **Le point O est dans le plan P.** — Menons dans le plan P une droite O*x* (fig. 132) puis, construisons le plan Q, perpendiculaire en O à O*x* et coupant le plan P suivant O*y*. Enfin menons dans le plan Q la droite Δ perpendiculaire en O à O*y*. Cette droite Δ est perpendiculaire à O*x* (n° 148) et à O*y*. Elle est donc perpendiculaire au plan P.

Cette perpendiculaire est *unique :* toute autre droite Δ′ perpendiculaire en O au plan P (fig. 133), définirait avec la droite Δ, un plan R coupant le plan P suivant O*z*. Dans le plan R, les deux droites Δ et Δ′, toutes deux perpendiculaires à O*z*, seraient confondues.

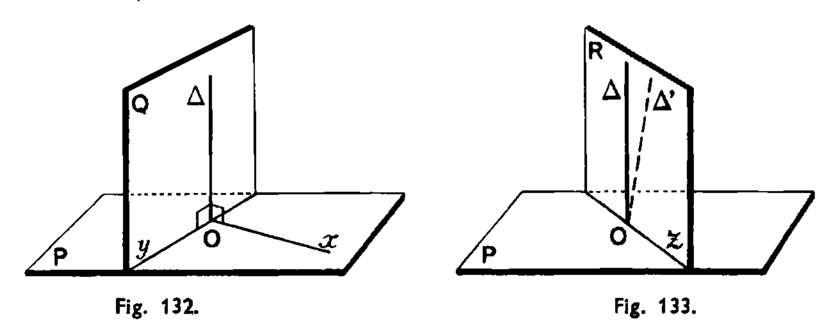


Fig. 132. Fig. 133.

2° **Le point** O **est extérieur au plan** P. — Menons par le point O, le plan P′ parallèle au plan P (fig. 134). Toute droite perpendiculaire à l'un des plans P ou P′ est perpendiculaire à l'autre. La perpendiculaire unique en O au plan P′ est donc la perpendiculaire cherchée.

155. Corollaire. — ***Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.***

Soient deux droites Δ et Δ′ perpendiculaires au plan P (fig. 131). Menons par le point O de Δ′ la parallèle à Δ. Nous obtenons une perpendiculaire au plan P (n° 151, 3°) donc confondue avec la droite Δ′. Les droites Δ et Δ′ sont donc parallèles.

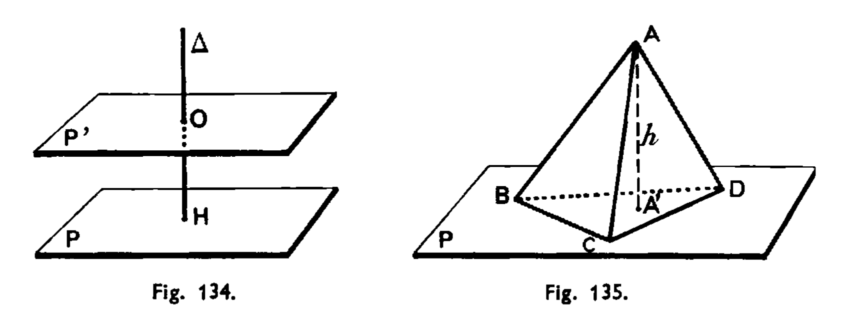


Fig. 134. Fig. 135.

Par exemple toutes les droites perpendiculaires à un plan horizontal sont verticales.

156. Définition. — ***On appelle hauteur d'un tétraèdre la perpendiculaire menée d'un sommet à la face opposée.***

En menant par le sommet A, la perpendiculaire AA' au plan BCD (fig. 135), on obtient la hauteur AA' du tétraèdre ABCD.

Un tétraèdre a quatre hauteurs : la hauteur AA' est dite issue du sommet A et relative à la face BCD. Signalons que les quatre hauteurs d'un tétraèdre ne sont pas, en général, concourantes.

EXERCICES

266. Deux segments égaux AA' et BB' sont perpendiculaires en A et B à un plan P et de même sens. Montrer que AA'B'B est un rectangle.

267. Par les sommets ABCD d'un quadrilatère on mène les segments égaux AA', BB', CC' et DD' perpendiculaires au plan du quadrilatère et d'un même côté par rapport à ce plan.

1° Montrer que le solide ABCD A'B'C'D' est limité par quatre rectangles et par deux polygones égaux situés dans des plans parallèles (prisme droit).

2° Comment choisir les données pour obtenir un parallélépipède rectangle, un cube?

268. Deux segments égaux AA' et BB' sont perpendiculaires en A et B à un plan P et de sens contraires. Montrer que A'B' coupe AB en son milieu O.

269. Les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires au plan P respectivement en B et C. Par un point A du plan P non situé sur BC on mène la droite xy parallèle à BC et par xy un plan Q qui coupe D_1 et D_2 respectivement en D et E.

1° Montrer que DE est parallèle au plan P.

2° Montrer que si AB = AC le triangle ADE est isocèle. Étudier la réciproque.

270. On mène les perpendiculaires D_1 et D_2 en B et C au plan du triangle ABC. Un plan Q passant par la médiane AO du triangle ABC coupe D_1 et D_2 respectivement en D et E.

1° Montrer que AO est médiane du triangle ADE.

2° Si AB = AC montrer que le triangle ADE est isocèle. Étudier la réciproque.

271. On construit les plans P et Q respectivement perpendiculaires aux côtés Ox et Oy de l'angle xOy.

1° Montrer que les plans P et Q se coupent.

2° Montrer que leur intersection est perpendiculaire au plan de l'angle xOy.

272. En H orthocentre du triangle équilatéral ABC de côté 6 cm, on mène le segment HM = x perpendiculaire au plan ABC.

1° Montrer que les triangles MAB, MBC, MCA sont isocèles et égaux.

2° Déterminer x pour que ces triangles soient rectangles.

3° On suppose MA = AB. Quelle est la valeur de x et quelle est la nature des quatre faces du tétraèdre MABC?

273. Trois demi-droites OA, OB, OC sont perpendiculaires deux à deux. La perpendiculaire menée de O au plan ABC le coupe en H.

1° Montrer que la droite OA est orthogonale à la droite BC et que la droite BC est perpendiculaire au plan AOH.

2° Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

3° Calculer OH lorsque : OA = 2,4 cm; OB = 3 cm; OC = 4 cm.

274. Soit I le milieu de l'arête CD du tétraèdre régulier ABCD dont les six arêtes sont égales.

1° Montrer que CD est perpendiculaire au plan IAB.

2° Montrer que les hauteurs AA' et BB' du triangle IAB sont respectivement perpendiculaires aux faces BCD et ACD du tétraèdre.

3° En déduire que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes et égales.

4° Calculer leur valeur commune lorsque AB = 12 cm.

DROITES ORTHOGONALES

157. Théorème. — ***Les différentes droites issues d'un point fixe et orthogonales à une droite donnée, engendrent le plan passant par ce point et perpendiculaire à la droite donnée.***

Désignons par P le plan passant par le point fixe O et perpendiculaire à la droite donnée Δ :

1° **Le point** O **est sur** Δ. — Toute droite O*x* du plan P (fig. 136) est perpendiculaire à Δ. Toute droite O*y* autre que O*x* et perpendiculaire à Δ détermine avec O*x* un plan perpendiculaire à Δ en O, donc confondu avec le plan P (n° 152). Cette droite O*y* engendre donc le plan P en tournant autour de O.

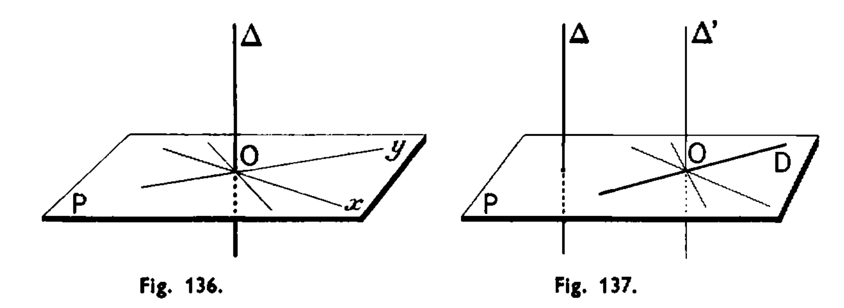


Fig. 136. Fig. 137.

2° **Le point** O **est extérieur à** Δ. — Menons par O la droite Δ' parallèle à Δ. Toute droite D (fig. 137) orthogonale à Δ et passant par O est perpendiculaire en O à Δ' et réciproquement. La droite D engendre le plan perpendiculaire en O à Δ', donc perpendiculaire à Δ, c'est-à-dire le plan P.

158. Corollaire. — ***Lorsque deux droites sont orthogonales, chacune d'elles est située dans un plan perpendiculaire à l'autre.***

En effet, toute droite D orthogonale à la droite Δ, est située dans le plan P mené, par un point quelconque O de D, perpendiculairement à Δ (fig. 137).

Réciproquement si la droite D est située dans un plan P perpendiculaire à Δ, la droite D est orthogonale à Δ d'après la définition (n° 148) d'une perpendiculaire à un plan. Par suite :

Pour que deux droites soient orthogonales il faut et il suffit que l'une d'elles soit située dans un plan perpendiculaire à l'autre.

D'autre part :

Quand deux droites sont orthogonales, on peut mener par l'une d'elles, un plan perpendiculaire à l'autre.

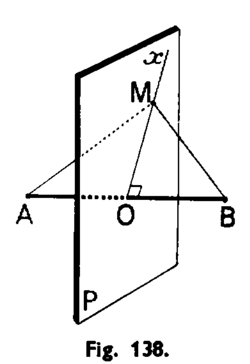


Fig. 138.

159. Plan médiateur d'un segment.

Le segment AB admet, dans l'espace, une infinité de médiatrices telles que Ox (fig. 138) dont tous les points M sont équidistants de A et B. Cette médiatrice en tournant autour de O engendre le plan perpendiculaire au segment AB en son milieu. C'est le *plan médiateur* de AB et tous ses points sont équidistants de A et B.

Le plan perpendiculaire à un segment en son milieu est le plan médiateur du segment. Il constitue l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

Le plan de l'équateur terrestre est médiateur du segment qui joint les pôles terrestres.

PERPENDICULAIRE ET OBLIQUES

160. Théorème. — ***Lorsque d'un point extérieur à un plan on mène à ce plan la perpendiculaire et diverses obliques :***

1° ***La perpendiculaire est plus courte que toute oblique.***

2° ***Si deux obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire, elles sont égales.***

3° ***Si deux obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus longue.***

Par le point O, extérieur au plan P, menons la perpendiculaire OH à ce plan et les obliques OA, OB et OC (fig. 139).

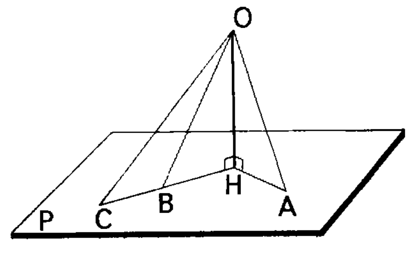


Fig. 139.

1° Le côté OH du triangle OHA rectangle en H est inférieur à l'hypoténuse OA. Donc : $OH < OA$.

2° Si $HA = HB$ les triangles rectangles OHA et OHB sont égaux d'après le second cas d'égalité des triangles quelconques car ils ont : $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = 1^D$; $HA = HB$ et OH commun. Donc : $OA = OB$.

3° Si $HC > HA$, construisons le point B de HC tel que $HB = HA$. D'après ce qui précède $OB = OA$. Or dans le plan OHC l'oblique OC s'écarte plus que OB du pied H de la perpendiculaire; on sait que $OC > OB$. Donc : $OC > OA$.

161. Réciproque. — 1° ***Lorsque deux obliques sont égales, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire.***

2° ***Lorsque deux obliques sont inégales, c'est la plus grande qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.***

1° Si $OA = OB$ (fig. 139) on ne peut avoir $HA \neq HB$ car on aurait : $OA \neq OB$ (n° 160). Donc : $HA = HB$.

2° Si $OC > OA$ on ne peut avoir $HC \leqslant HA$ sinon on aurait $OC \leqslant OA$ (n° 160). Donc : $HC > HA$.

162. Axe d'un cercle. — Considérons, dans un plan P, un cercle Γ de centre O et la droite Δ perpendiculaire en O au plan P (fig. 140). Cette droite Δ est appelée *axe du cercle.*

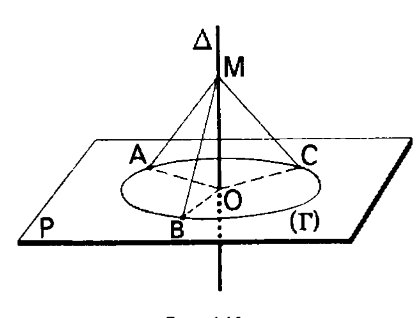


Fig. 140.

Si A, B et C sont des points du cercle et M un point quelconque de Δ, les obliques MA, MB, MC sont égales (n° 160). Réciproquement, si un point M est équidistant de trois points non alignés A, B, C, le pied de la perpendiculaire, menée de M au plan ABC est le centre O du cercle ABC (n° 161) et le point M appartient à l'axe Δ de ce cercle.

L'axe d'un cercle est la perpendiculaire à son plan en son centre. Il constitue l'ensemble des points équidistants des points du cercle.

La figure formée par un cercle et son axe est celle d'une roue et de son axe ou de l'équateur terrestre et de la droite des pôles.

163. Théorème des trois perpendiculaires. — ***Lorsque, d'un point extérieur à un plan, on mène la perpendiculaire à ce plan et la perpendiculaire à une droite Δ de ce plan, la droite qui joint les pieds de ces deux perpendiculaires est elle-même perpendiculaire à la droite Δ.***

Menons par le point O, la perpendiculaire OH au plan P et la perpendiculaire OA à une droite donnée Δ de ce plan (fig. 141). La droite Δ orthogonale à OH et perpendiculaire à OA est perpendiculaire au plan OHA. Elle est donc perpendiculaire à HA (nº 151, 2º).

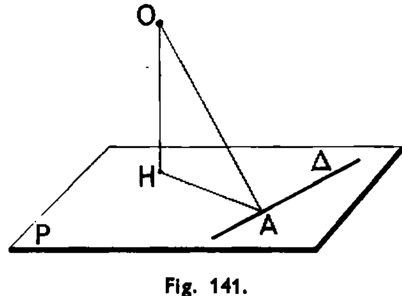


Fig. 141.

— Notons que le point A est le pied du plan mené par OH, perpendiculairement à la droite Δ, orthogonale à OH. On peut rétablir la figure en commençant par mener HA perpendiculaire à Δ.

Si on se donne la perpendiculaire OH et l'oblique OA au plan P, la droite Δ correspondante est la perpendiculaire en A au plan OHA.

164. Distances. — 1º ***On appelle distance d'un point à un plan la longueur du segment perpendiculaire au plan compris entre ce point et le plan.***

C'est la longueur *d* de AH (fig. 142) plus court segment joignant A à un point du plan P. Le point H se nomme *projection orthogonale* du point A sur le plan P.

Si le plan P est horizontal, on peut mesurer cette distance *d* à l'aide du fil à plomb. Elle représente la hauteur (ou l'altitude) du point A par rapport au plan horizontal P.

2º ***On appelle distance d'une droite et d'un plan parallèles la longueur du segment découpé par la droite et le plan sur une perpendiculaire commune.***

Si Δ est parallèle au plan P (fig. 143) les segments tels que AA′ et BB′ perpendiculaires au plan P et coupant Δ en A et B sont parallèles (nº 155) et égaux (nº 135). Leur longueur commune *d* est la distance de Δ au plan P. C'est la distance au plan P d'un point quelconque de la droite Δ.

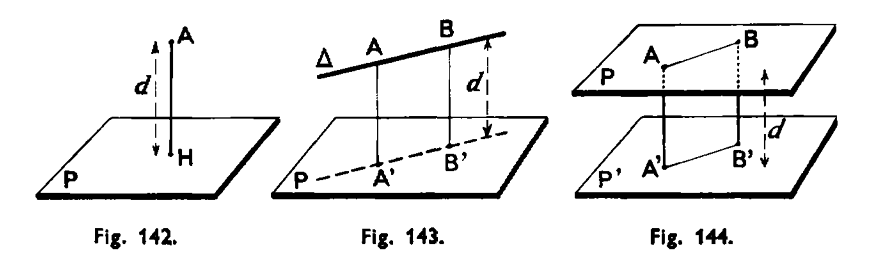


Fig. 142. Fig. 143. Fig. 144.

3º ***On appelle distance de deux plans parallèles la longueur du segment découpé par ces plans sur une perpendiculaire commune.***

Les segments tels que AA′ et BB′ (fig. 144) perpendiculaires aux plans parallèles P et P′ sont égaux (nº 145). Leur longueur commune mesure la distance de ces plans. Elle est égale à celle d'un point quelconque de ces plans à l'autre plan.

EXERCICES

275. Soit un plan P, un point O de ce plan et une droite quelconque D. Construire une droite passant par O, située dans le plan P et orthogonale à D.

276. Deux plans P et Q sont sécants suivant une droite Δ. Une droite D du plan P coupe Δ en O. Construire dans le plan Q une droite perpendiculaire en O à la droite D.

277. La droite Δ est oblique au plan P. Deux droites D_1 et D_2 du plan P sont orthogonales à Δ. Démontrer qu'elles sont parallèles.

278. On donne une droite Δ et un point extérieur O. Soit A le pied de la perpendiculaire menée du point O à la droite Δ. Un plan variable P pivote autour de la droite Δ et on mène OH perpendiculaire à P.

1º Montrer que la droite OH engendre le plan Q passant par le point O et perpendiculaire à Δ.

2º Montrer que le point H décrit un cercle de diamètre OA dans ce plan.

3º Déterminer le plan P connaissant la longueur de OH.

279. Soit un plan P, un point O extérieur tel que OH, distance du point O au plan P, mesure 60 cm.

1° L'oblique OM mesure 65 cm. Calculer HM. Quelle figure décrit M dans le plan P lorsque l'oblique OM prend toutes les positions possibles.

2° Quels sont les points communs au plan P et à la sphère de centre O, dont le rayon est égal à 65 cm?

280. A quelle figure appartiennent les points M équidistants de deux plans parallèles P et Q?

281. 1° Montrer que les points M situés à la distance 10 cm d'un plan P appartiennent à l'un ou l'autre de deux plans parallèles au plan P.

2° A quelle figure appartiennent les points M dont les distances à deux plans sécants P et Q valent respectivement 10 cm et 20 cm.

282. Montrer que le centre O d'une sphère passant par les sommets A, B, C et D du tétraèdre ABCD appartient à l'axe du cercle BCD et au plan médiateur de AB. Trouver 3 autres axes et 5 autres plans médiateurs auxquels appartient le point O.

283. La droite OH est perpendiculaire en H au plan P. Une droite D tourne dans le plan P autour du point A et on mène la droite OM perpendiculaire en M à la droite D

1° Montrer que le point M décrit dans P le cercle de diamètre AH.

2° Déterminer D de façon que le segment OM soit maximum, ou minimum.

284. On donne le plan P, le point A de ce plan et un point O extérieur au plan P. Trouver la figure décrite par le point variable M du plan P dans chacun des cas suivants :

1° Le triangle AOM est rectangle en A.

2° Le triangle AOM est rectangle en O.

3° Le triangle AOM est rectangle en M.

ANGLES DIÈDRES

165. Définition. — ***On appelle angle dièdre (ou dièdre) la figure formée par deux demi-plans issus d'une même droite.***

Cette droite AB est l'*arête* du dièdre (fig. 145). Les demi-plans P et Q sont les faces du dièdre que l'on désigne par la notation (P, AB, Q) ou si cela suffit par (P, Q) ou même par (AB).

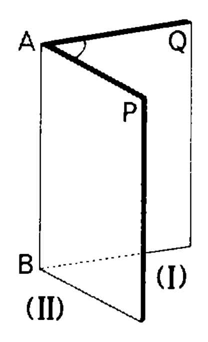


Fig. 145.

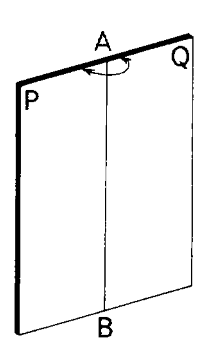


Fig. 146.

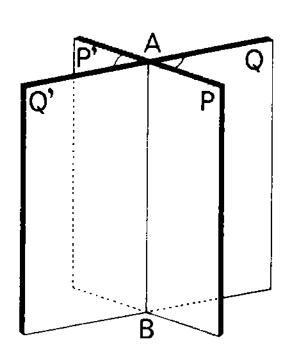


Fig. 147.

Un dièdre partage l'espace en deux régions (I) et (II), l'une *intérieure* au dièdre et l'autre *extérieure*. Sauf indication contraire, nous ne considérerons que des dièdres saillants pour lesquels l'intérieur est la région de l'espace située tout entière d'un même côté du plan d'une face.

Les deux couvertures d'un livre ouvert donnent la notion de dièdre.

Un dièdre *plat* a ses faces dans un même plan (fig. 146). Un dièdre *nul* a ses faces confondues. Deux dièdres sont *opposés par l'arête* si les faces de l'un sont

les prolongements des faces de l'autre. Deux plans sécants déterminent quatre dièdres formant deux couples de dièdres opposés par l'arête (fig. 147).

166. Rectiligne d'un dièdre. — ***On appelle rectiligne d'un dièdre l'angle plan obtenu en coupant ce dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête.***

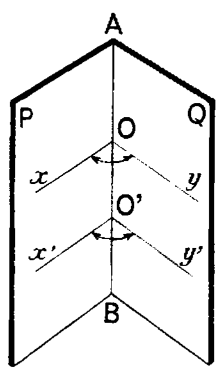


Fig. 148.

Coupons le dièdre (P, AB, Q) de la figure 148 par deux plans perpendiculaires en O et O' à son arête. Les demi-droites Ox et O'x' situées dans le demi-plan P et perpendiculaires à AB, sont parallèles et de même sens. Il en est de même pour Oy et O'y' dans le demi-plan Q. Les rectilignes xOy et x'O'y' du dièdre considéré sont égaux. Ainsi :

Tous les rectilignes d'un dièdre sont égaux.

167. Dièdres égaux. — Ce sont deux dièdres *superposables.*

1° La superposition de deux dièdres entraîne celle de leurs rectilignes :

Deux dièdres égaux ont même rectiligne.

2° Considérons deux dièdres ayant des rectilignes égaux. Lorsque ces rectilignes sont superposés en xOy (fig. 148) les arêtes des dièdres sont confondues suivant la droite AB perpendiculaire en O au plan xOy .Ces dièdres sont superposés, donc égaux :

Si deux dièdres ont même rectiligne, ils sont égaux.

Il en résulte aussi qu'un dièdre est déterminé par la position de l'un de ses rectilignes, tel que xOy.

168. Addition des dièdres. — *Deux dièdres sont adjacents s'ils ont même arête, une face commune et sont situés de part et d'autre de cette face commune.*

Les dièdres (P, Q) et (Q, R) sont adjacents (fig. 149). Le dièdre (P, R) limité par les faces non communes est par définition la *somme* des dièdres (P, Q) et (Q, R). Le dièdre (Q, R) est la *différence* des dièdres (P, R) et (P, Q). Le dièdre (P, R) est *supérieur* au dièdre (P, Q). Pour effectuer la somme de plusieurs dièdres on additionne les deux premiers en les rendant adjacents, puis le dièdre obtenu au troisième et ainsi de suite jusqu'au dernier. Les dièdres sont des *grandeurs mesurables.* Le théorème suivant ramène la mesure d'un dièdre à celle de son rectiligne :

169. Théorème. — ***Le rapport de deux dièdres est égal à celui de leurs rectilignes.***

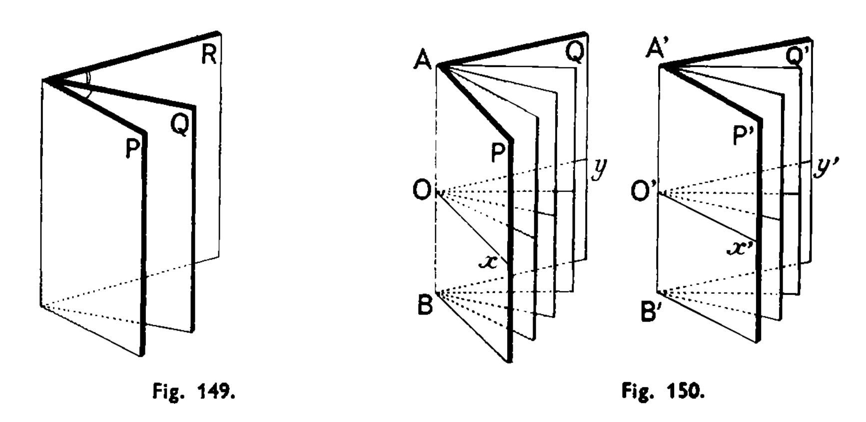


Fig. 149. Fig. 150.

Soient les dièdres (P, Q) et (P′, Q′) de rectilignes respectifs xOy et $x'O'y'$ (fig. 150). Supposons que : $\widehat{xOy} = \frac{4}{3}\,\widehat{x'O'y'}$. Nous partageons l'angle xOy en quatre parties égales, l'angle $x'O'y'$ en trois parties égales et les 7 angles obtenus sont égaux. A chacun de ces angles correspond un dièdre l'admettant pour rectiligne. Les 7 dièdres ainsi obtenus sont égaux. Le dièdre (P, Q) en contient quatre; le dièdre (P′, Q′) en contient trois. Le rapport des dièdres (P, Q) et (P′, Q′) est $\frac{4}{3}$, donc égal à celui des rectilignes.

170. Mesure des dièdres. — *Par convention on adopte pour unité d'angle dièdre celui qui a pour rectiligne l'unité d'angle.* Dans ces conditions :

La mesure d'un angle dièdre est égale à celle de son rectiligne.

En effet si l'angle $x'O'y'$ est l'unité d'angle (fig. 150), le dièdre (P′, Q′) est alors l'unité d'angle dièdre. L'angle xOy a alors pour mesure $\frac{4}{3}$ de même que le dièdre (P, Q).

171. Unités de dièdre. — Comme nous l'avons fait pour les arcs on donne aux unités de dièdre le même nom que l'unité correspondante d'angle plan. L'unité principale d'angle plan est l'angle droit. L'unité principale de dièdre est le dièdre dont le rectiligne est un angle droit. On le nomme *dièdre droit.*

On appelle dièdre droit tout dièdre dont le rectiligne est un angle droit.

De même on nomme dièdre de 1°, $1'$, $1''$, 1 gr, ceux dont le rectiligne vaut 1°, $1'$, $1''$, 1 gr. Il en résulte qu'un dièdre de $53^o47'32''$ par exemple a pour rectiligne un angle de $53^o47'32''$. Un dièdre plat a pour rectiligne un angle plat, soit deux angles droits :

Un dièdre droit vaut donc la moitié d'un dièdre plat.

— L'analogie entre les dièdres et les angles plans s'étend aux définitions et propriétés suivantes que nous nous bornerons à énoncer :

Un dièdre saillant est *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est *inférieur* ou *supérieur* à un dièdre droit.

Deux dièdres sont *complémentaires* si leur somme vaut un *dièdre droit*, *supplémentaires* si leur somme vaut un *dièdre plat*.

Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux. Deux plans sécants déterminent quatre dièdres deux à deux égaux ou supplémentaires.

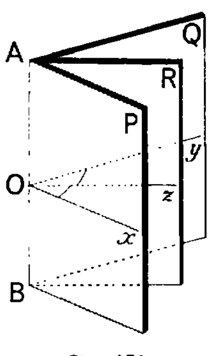


Fig. 151.

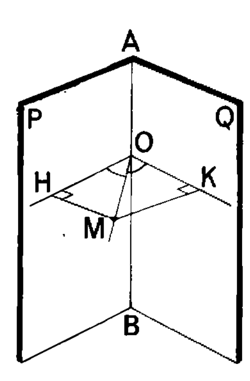


Fig. 152.

On appelle *bissecteur d'un dièdre* (P, Q) le demi-plan R qui partage ce dièdre en deux dièdres égaux (fig. 151). On démontre que *tout point* M *du bissecteur est équidistant des faces du dièdre* (fig. 152).

172. Angle de deux plans. — *On appelle angle de deux plans sécants l'un des angles dièdres qu'ils déterminent.*

Le plus souvent on considère l'angle aigu de ces plans (fig. 147) mesure du rectiligne de l'un des deux dièdres aigus qu'ils déterminent.

173. Théorème. — ***L'angle aigu de deux plans est égal à l'angle aigu de deux perpendiculaires respectives à ces plans.***

Menons d'un point M les perpendiculaires MA et MB aux faces du dièdre aigu formé par les plans P et Q (fig. 153). Ces droites sont orthogonales à l'arête Δ du dièdre (nº 148) et déterminent un plan R perpendiculaire en O à Δ (nº 149). L'angle AOB est donc un rectiligne du dièdre (P, Q). Dans le plan AOB, les droites MA et MB sont respectivement perpendiculaires aux droites OA et OB. L'angle aigu des droites MA et MB est donc égal à l'angle aigu des droites OA et OB et a même mesure que le dièdre aigu (P, Q).

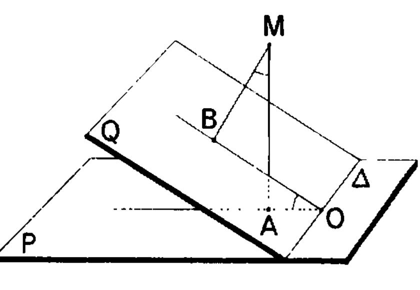


Fig. 153.

EXERCICES

285. Les plans parallèles P et Q sont coupés par le plan R respectivement suivant les droites D et D'. Montrer que les huit dièdres d'arêtes D et D' ainsi formés sont deux à deux égaux ou supplémentaires.

286. 1º Démontrer que si deux dièdres ont leurs faces respectivement parallèles et de même sens, ils sont égaux.

2º En déduire que deux dièdres, dont les faces sont respectivement parallèles et de sens contraires, sont égaux.

287. On considère un point M variable sur un cercle de diamètre AB. En A et B on mène les perpendiculaires Ax et By au plan du cercle. Évaluer le dièdre dont les faces sont les plans MAx et MBy.

288. Une droite coupe en A et B respectivement les faces P et Q d'un dièdre de 60º. On mène les perpendiculaires AI et BJ à l'arête du dièdre et l'on donne : AI = 21 cm ; BJ = 21 cm ; IJ = 28 cm. Calculer AB.

289. On considère le tétraèdre OABC où l'arête OC est perpendiculaire aux arêtes OA et OB et où le dièdre d'arête OC vaut 120º. On donne : OA = OB = 12 cm et OC = 6 cm.

1º Évaluer les côtés du triangle ABC.

2º Évaluer le dièdre d'arête AB.

290. Dans le plan P on donne le triangle équilatéral ABC de côté a. En A on mène la demi-droite Ax perpendiculaire au plan P et on porte sur Ax le segment AM = m. Soit I le mllieu de BC.

1° Montrer que l'angle MIA est le rectiligne du dièdre d'arête BC dans le tétraèdre MABC.

2° Déterminer m en fonction de a pour que ce dièdre mesure 60°.

291. Dans le plan P on donne un triangle rectangle isocèle ABC d'hypoténuse BC = a et sur la demi-droite Ax perpendiculaire en A au plan P, on donne le point S

1° Quelles sont les valeurs des dièdres d'arêtes AB, AC, AS de ce tétraèdre?

2° Calculer AS en fonction de a pour que le dièdre d'arête BC soit égal à 45°.

292. Une pyramide SABCD a pour base le carré ABCD de côté a. Le sommet S est sur la perpendiculaire au plan de ce carré menée en son centre O et OS = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

1° Montrer que les arêtes SA, SB, SC, SD sont égales et évaluer leur longueur.

2° Évaluer les dièdres d'arêtes AB, BC, CD et DA de cette pyramide.

293. On considère le tétraèdre ABCD dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux de côté a.

1° Montrer que le plan bissecteur du dièdre d'arête AB est médiateur du segment CD.

2° Évaluer le dièdre dont les faces sont les plans bissecteurs des dièdres d'arêtes AB et AC puis celui dont les faces sont les bissecteurs des dièdres d'arêtes AB et CD.

294. Soit M un point intérieur au dièdre (P, Q) d'arête D. On mène MA et MB respectivement perpendiculaires en A et B aux faces P et Q du dièdre.

1° Montrer que le plan MAB est perpendiculaire à la droite D et qu'il coupe le dièdre suivant un rectiligne AOB.

2° Si M est dans le plan bissecteur du dièdre montrer que MA = MB.

3° Énoncer et démontrer la réciproque du 2°.

PLANS PERPENDICULAIRES

174. Définition. — ***Deux plans sécants sont perpendiculaires lorsque l'un des quatre dièdres qu'ils forment est droit.***

En coupant les plans P et Q par un plan perpendiculaire à leur intersection (fig. 154) on fait apparaître les rectilignes des quatre dièdres obtenus. Si l'un de ces rectilignes est droit, les droites Ox et Oy sont perpendiculaires et les quatre rectilignes sont droits :

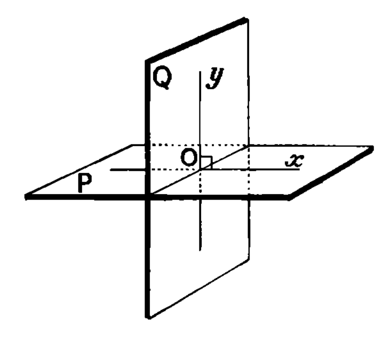


Fig. 154.

Deux plans perpendiculaires forment quatre dièdres droits.

Le plan horizontal du plancher et le plan vertical de l'un des murs de la classe donnent la notion de plans perpendiculaires. Deux plans perpendiculaires sont parfois appelés plans rectangulaires.

175. Théorème. — ***Lorsque deux plans sont perpendiculaires, chacun d'eux contient une perpendiculaire à l'autre.***

Soient les plans perpendiculaires P et Q (fig. 155). En un point quelconque O de leur intersection, construisons le rectiligne AOB du dièdre (P, Q).

L'angle AOB est droit par hypothèse. La droite OA perpendiculaire à CD et à OB est perpendiculaire au plan Q. De même, la droite OB perpendiculaire à CD et à OA est perpendiculaire au plan P. Chaque plan contient une perpendiculaire à l'autre ou est perpendiculaire à une droite de l'autre.

176. Réciproque. — ***Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan passant par cette droite est perpendiculaire au premier.***

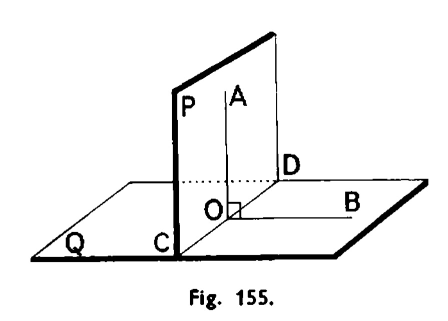


Fig. 155.

Soit la droite OA perpendiculaire au plan Q (fig. 155). Tout plan P contenant cette droite OA coupe le plan Q suivant la droite CD et la droite OA est perpendiculaire à CD (nº 148). Achevons le rectiligne AOB du dièdre (P, Q). La droite AO est perpendiculaire à OB (nº 148). L'angle AOB étant droit, il en est de même du dièdre (P, Q).

Ainsi tout plan passant par une verticale est perpendiculaire au plan horizontal et se nomme plan vertical. Le plan de tout méridien terrestre contient la droite des pôles. Il est perpendiculaire au plan de l'équateur et aux différents plans des parallèles terrestres.

177. Remarque. — Les théorèmes nºs 176 et 175 peuvent être rassemblés dans l'énoncé unique suivant :

Pour que deux plans soient perdendiculaires il faut et il suffit que l'un d'eux contienne une perpendiculaire à l'autre (ou soit perpendiculaire à une droite de l'autre).

178. Corollaire I. — ***Lorsque deux plans sont perpendiculaires, toute droite menée d'un point de l'un perpendiculairement à l'autre est contenue dans le premier.***

Si les plans P et Q sont perpendiculaires (fig. 155), la droite AO menée par le point A du plan P et perpendiculaire à CD, intersection des deux plans, est perpendiculaire au plan Q car c'est le côté d'un rectiligne du dièdre (P, Q). La perpendiculaire menée de A au plan Q est donc confondue avec AO (nº 154) et appartient donc au plan P.

179. Corollaire II. — ***Lorsqu'un plan est perpendiculaire à deux plans sécants, il est perpendiculaire à leur intersection.***

Soit A un point de l'intersection des plans P et Q tous deux perpendiculaires au plan R (fig. 156). La perpendiculaire au plan R, menée par A, appartient à la fois aux plans P et Q (nº 178). Elle coïncide donc avec leur intersection.

180. Remarque. — Notons que l'on peut dire :

Lorsque deux plans sécants sont perpendiculaires à un troisième leur intersection est perpendiculaire à ce troisième.

C'est la disposition de deux plans verticaux P et Q, issus d'une verticale Δ, et d'un plan horizontal quelconque R.

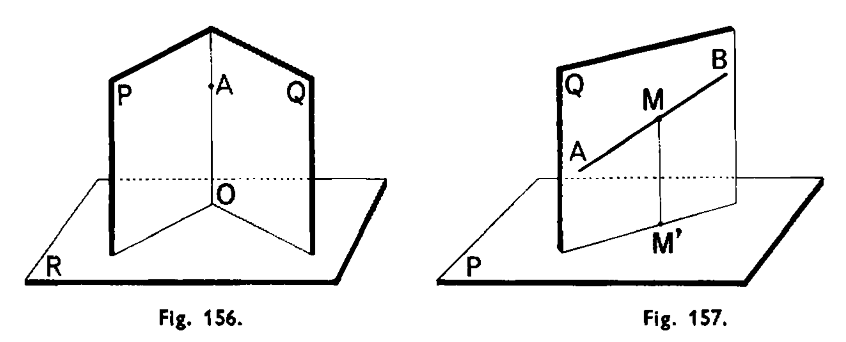


Fig. 156.

Fig. 157.

181. Corollaire III. — ***Par une droite non perpendiculaire à un plan, on peut mener à ce plan, un plan perpendiculaire et un seul.***

Menons par le point M de la droite AB (fig. 157) la perpendiculaire MM' au plan P. Le plan Q défini par les droites concourantes MM' et AB est perpendiculaire au plan P. Tout autre plan passant par AB et perpendiculaire au plan P doit contenir MM' (nº 178). Il est confondu avec le précédent.

Rappelons que si AB est perpendiculaire au plan P, il passe par AB une infinité de plans perpendiculaires au plan P (nº 176).

182. Théorème. — ***Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.***

Soient deux plans parallèles P et Q. Le plan R est perpendiculaire au plan P (fig. 158). Menons dans le plan R une droite Δ perpendiculaire au plan P. Elle est aussi perpendiculaire au plan Q (nº 151, 4º). Le plan R qui contient une perpendiculaire au plan Q est perpendiculaire au plan Q (nº 176).

183. Théorème. — ***Lorsqu'une droite* D *et un plan* P *sont perpendiculaires à un même plan* Q*, ils sont parallèles.***

Le plan P perpendiculaire au plan Q (fig. 159) contient une droite Δ perpendiculaire au plan Q. Les droites D et Δ toutes deux perpendiculaires au plan Q sont parallèles (nº 155). La droite D parallèle à une droite Δ du plan P est parallèle à ce plan (nº 128).

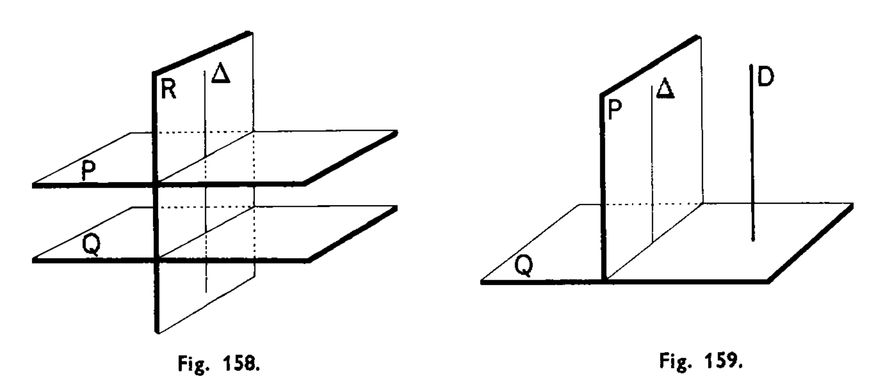


Fig. 158.

Fig. 159.

184. Théorème. — ***Lorsqu'une droite* D *est parallèle à un plan* P *et perpendiculaire à un plan* Q*, les deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires.***

Menons dans le plan P (fig. 159), une droite Δ parallèle à la droite donnée D (nº 129). Cette droite Δ est, comme sa parallèle D, perpendiculaire au plan Q (nº 151, 3º) et le plan P qui contient Δ est perpendiculaire au plan Q (nº 176).

EXERCICES

295. On donne deux plans perpendiculaires P et Q et leur rectiligne xOy. Montrer que tout plan passant par Ox ou par Oy coupe le dièdre (P, Q) suivant un angle droit.

296. Dans le tétraèdre ABCD la face ABC est rectangle en B et l'arête AD est perpendiculaire au plan ABC.

1º Montrer que BC est perpendiculaire au plan DAB et que toutes les faces du tétraèdre sont des triangles rectangles.

2º Montrer que les plans ABD et DBC sont perpendiculaires.

3º Démontrer que le milieu I de CD est équidistant des quatre sommets du tétraèdre ABCD.

297. On considère un cercle de centre O d'un plan P, une corde AB de ce cercle et le segment OS perpendiculaire en O au plan P. Soit M le milieu de AB.

1° Montrer que le plan SOM est médiateur du segment AB.

2° Montrer que les plans SOM et SAB sont perpendiculaires.

3° Montrer que la hauteur OH du triangle SOM est perpendiculaire au plan SAB.

298. Dans le plan P on donne le carré ABCD de côté a. En A on mène le segment AS perpendiculaire au plan P et de longueur a. Soit M le milieu du segment SB.

1° Montrer que le plan AMD est perpendiculaire à SB et aux plans SAB et SBC.

2° Montrer qu'il coupe le tétraèdre SABCD suivant un trapèze rectangle dont on calculera le périmètre et la surface en fonction de a.

299. Le triangle OAB est tel que OA = OB et I désigne le milieu de AB. On prend un point M sur la perpendiculaire en O au plan du triangle.

1° Montrer que le plan MOI est perpendiculaire aux plans OAB et MAB et que le pied H de la perpendiculaire menée de O au plan MAB est sur MI.

2° Si les points O, A, B restent fixes et si M varie, quelle est la figure décrite par le point H?

300. Par les sommets du carré ABCD on mène les segments AA′, BB′, CC′ et DD′ perpendiculaires au plan du carré, d'un même côté de ce plan, et tels que $AA' = CC' = 2x$; $BB' = x$ et $DD' = 3x$.

1° Montrer que A′C′ est parallèle au plan du carré.

2° Montrer que B′D′ coupe le segment A′C′ en son milieu.

3° Montrer que A′B′C′D′ est un losange dont le plan est perpendiculaire au plan BB′D′D.

301. On considère le trapèze isocèle ABCD de bases $AD = 2a$; $BC = a$ et dont les côtés obliques ont pour longueur a. Dans le plan P perpendiculaire au plan du trapèze et passant par AD on construit le triangle équilatéral SAD.

1° Montrer que le plan médiateur de AD passe par S, qu'il est médiateur de BC et perpendiculaire au plan SBC.

2° Montrer que $SA = SB = SC = SD = 2a$.

3° Si M et N sont les milieux de SA et SD montrer que BMNC est un rectangle et évaluer son périmètre et sa surface en fonction de a.

302. On donne l'angle xOy du plan P. Le segment HM est perpendiculaire au plan P en un point H intérieur à l'angle xOy. On mène les perpendiculaires MA et MB aux demi-droites Ox et Oy.

1° Montrer que les triangles OHA et OHB sont rectangles.

2° Montrer que MA = MB entraîne HA = HB et réciproquement.

3° En déduire une propriété des points situés dans le demi-plan passant par la bissectrice d'un angle xOy et issu de la perpendiculaire en O au plan de cet angle.

PROJECTIONS ORTHOGONALES

185. Définition. — ***La projection orthogonale d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire menée de ce point sur ce plan.***

Soit le plan P, appelé *plan de projection* (fig. 160). La perpendiculaire AA′ menée par A au plan P est la *projetante* du point A sur le plan P et le point A′ est la *projection orthogonale* du point A sur le plan P. Si le point B est dans le plan P il est confondu avec sa projection sur P. Si le point M décrit une figure (F) sa projection M′ sur le plan P décrit une figure plane (F′) appelée *projection de la figure (F) sur le plan P.*

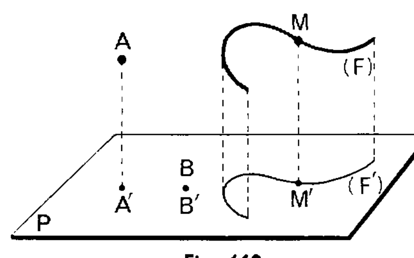


Fig. 160.

186. Projection d'une droite. — 1° Soit D une droite non perpendiculaire au plan P (fig. 161), A et M deux points l'un fixe, l'autre variable sur D et soient A′ et M′ leurs projections sur le plan P. Le plan Q déterminé par les droites D et AA′ est perpendiculaire au plan P (n° 176) et le coupe suivant une droite D′. Le plan Q contient MM′ (n° 178); donc M′ appartient à la droite D′ et la décrit en entier lorsque M décrit la droite D.

2° La démonstration est en défaut si la droite D est perpendiculaire au plan P (fig. 162). Dans ce cas, tous les points de D ont même projection A sur le plan P :

La projection orthogonale d'une droite sur un plan est en général une droite.

Notons que si la droite D coupe le plan de projection en O, ce point est sa propre projection sur le plan P, la projection D′ de la droite D sur le plan P passe donc par O (fig. 161).

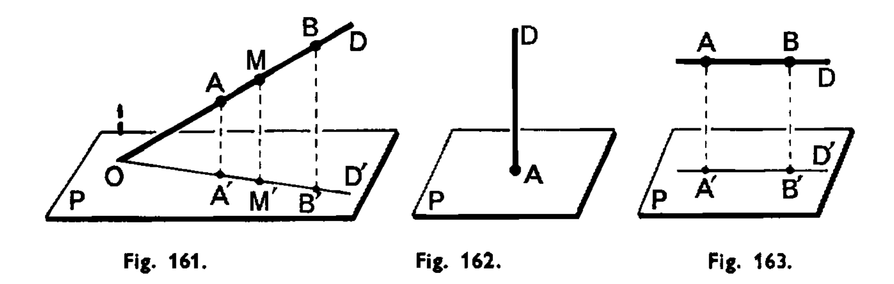


Fig. 161. Fig. 162. Fig. 163.

3° Si la droite D est parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection D′ sur le plan P (n° 129). Réciproquement, si D est parallèle à sa projection D′ sur le plan P (fig. 163) elle est parallèle au plan P (n° 128).

187. Projection d'un segment. — Si le point M décrit la demi-droite AD ou le segment AB, sa projection M′ sur le plan P (fig. 161) décrit la demi-droite A′D′ ou le segment A′B′. Ainsi :

La projection d'un segment de droite sur un plan est le segment qui joint les projections de ses extrémités.

Il en résulte que la projection d'un angle est un angle, celle d'un polygone un polygone.

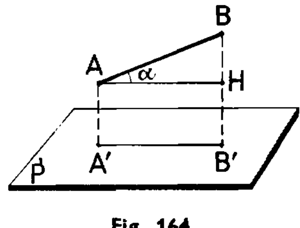


Fig. 164.

Désignons par α l'angle aigu du segment AB et de sa projection sur P (fig. 164) et menons AH perpendiculaire à BB′. Dans le triangle rectangle ABH on a : AH = AB cos α. D'autre part : AH = A′B′ comme côtés opposés du rectangle AHB′A′. On obtient :

$$A'B' = AB \cos\alpha.$$

La longueur de la projection orthogonale d'un segment sur un plan est égale au produit de la longueur de ce segment par le cosinus de l'angle aigu de ce segment et de sa projection.

Il en résulte que la projection orthogonale sur un plan, d'un segment AB, est en général plus courte que ce segment. Toutefois lorsque le segment AB est parallèle au plan de projection, on a : A′B′ = AB. On dit que le segment AB se projette en *vraie grandeur*.

Lorsque le plan P est horizontal, le rapport $\frac{HB}{AH} = \text{tg}\,\alpha$ est appelé *pente du segment AB* par rapport au plan horizontal P.

188. Théorème. — ***Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont en général parallèles.***

Les droites AB et CD sont parallèles et non perpendiculaires au plan P (fig. 165). Les projetantes AA′ et CC′ sont parallèles (nº 155). Les plans BAA′ et DCC′ sont parallèles (nº 138) ou confondus. Leurs intersections A′B′ et C′D′ avec le plan P sont parallèles (nº 142) ou confondues. Or ces droites sont les projections respectives de AB et CD sur le plan P. Il en résulte que :

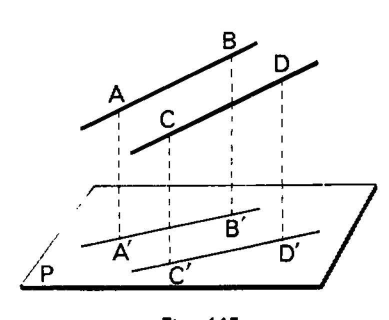


Fig. 165.

La projection d'un parallélogramme sur un plan est en général un parallélogramme.

189. Remarque. — La projection orthogonale sur un plan ne conserve en général ni les longueurs ni les angles. Parmi les propriétés conservées par la projection orthogonale, citons les suivantes :

— *Trois points alignés ont des projections alignées.*
— *Des droites concourantes (ou parallèles) ont pour projections des droites concourantes (ou parallèles).*
— *Le rapport de deux segments d'une même droite est égal à celui de leurs projections* (cela résulte du nº 146, th. de Thalès). En particulier :
— *Le milieu d'un segment a pour projection le milieu de la projection de ce segment.*

VECTEURS

190. Définition. — ***Un vecteur est un segment de droite orienté.***

Le symbole $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur décrit par un point mobile parcourant le segment AB dans le *sens* de A vers B (fig. 166).

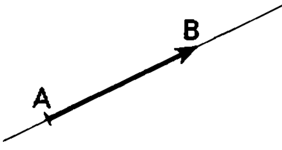


Fig. 166.

Le point A est l'*origine* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point B, son *extrémité*. La droite AB est le *support*

du vecteur et la longueur AB est le *module* du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Un vecteur est nul lorsque son module est nul : $\overrightarrow{AB} = 0$ si A et B sont confondus.

Deux vecteurs ont même direction lorsque leurs supports sont parallèles (ou confondus). Ils peuvent être parallèles et de même sens (fig. 170) ou de sens opposés (fig. 171).

191. Vecteurs égaux (ou équipollents). — ***Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même module.***

C'est le cas des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (fig. 167 et 168). On écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

La figure ABDC est un parallèlogramme véritable (fig. 167) ou aplati (fig. 168).

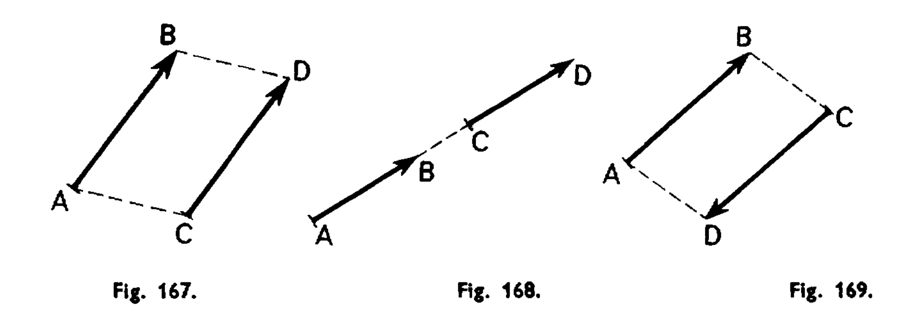


Fig. 167. Fig. 168. Fig. 169.

Si $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont tous deux égaux à $\overrightarrow{AB}$, ils ont eux-mêmes, la même direction le même sens et le même module. Ils sont donc égaux.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}.$$

192. Vecteurs opposés. — ***Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont même direction, même module et des sens opposés.***

C'est le cas des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (fig. 169). On écrit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.

Notons que dans ce cas, c'est ABCD qui est un parallélogramme. En parti culier, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

193. Rapport de deux vecteurs parallèles. — ***C'est le nombre algébrique qui a pour valeur absolue le rapport des modules de ces deux vecteurs et le signe + ou — suivant qu'ils sont de même sens ou de sens opposés.***

Ainsi (fig. 170) : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = +\dfrac{3}{5}$ et (fig. 171) : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\dfrac{2}{3}$.

Lorsque $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = k$, on écrit : $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé produit du vecteur $\overrightarrow{CD}$ par le nombre relatif k.

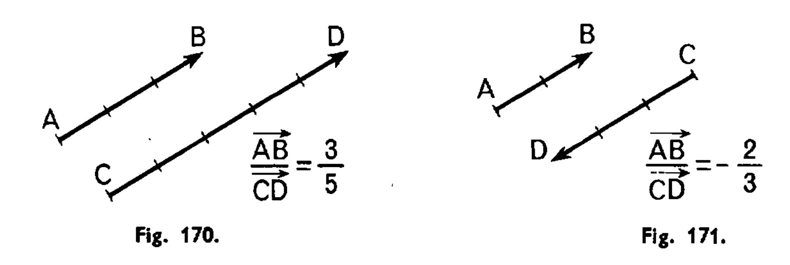


Fig. 170. Fig. 171.

On voit ainsi que deux vecteurs sont égaux lorsque leur rapport est + 1, opposés lorsque leur rapport est — 1.

Notons que si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont portés par un même axe, on a (n° 3) : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ car ces deux rapports ont tous deux pour valeur absolue $\dfrac{AB}{CD}$ et le même signe, + ou — suivant que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens ou non.

194. Somme de deux vecteurs. — 1° ***Par définition la somme de deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MS}$ est le vecteur $\overrightarrow{OS}$ qui joint l'origine du premier à l'extrémité du second.***

Ainsi (fig. 172) : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS}$.

2° Pour construire la somme de deux vecteurs donnés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, on construit à partir d'un point O quelconque : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS} \qquad \text{donc :} \qquad \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Il importe de remarquer que ***le vecteur*** $\overrightarrow{OS}$ ***est indépendant de l'origine*** O ***choisie.*** Construisons (fig. 173) : $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ puis : $\overrightarrow{M'S'} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MS}$. Les quadrilatères OMM'O' et MM'S'S sont des parallélogrammes et :

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{SS'}.$$

Fig. 172.

Fig. 173.

L'égalité $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{SS'}$ montre que le quadrilatère OO'S'S est un parallélogramme (nº 191) donc que : $\overrightarrow{O'S'} = \overrightarrow{OS}$.

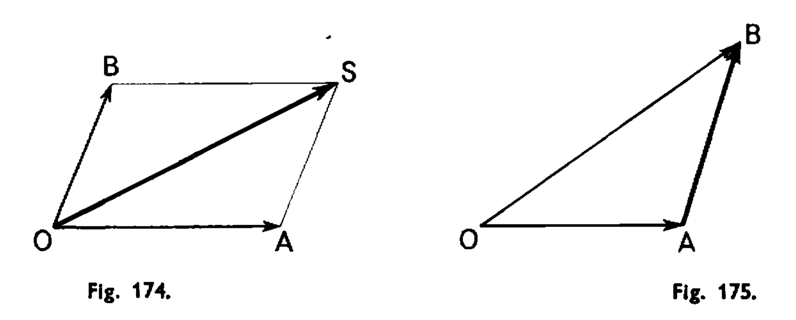


Fig. 174.

Fig. 175.

3º ***Si deux vecteurs*** $\overrightarrow{OA}$ ***et*** $\overrightarrow{OB}$ ***ont même origine*** (fig. 174), ***leur somme*** $\overrightarrow{OS}$ ***est le quatrième sommet du parallélogramme*** AOBS construit sur AO et OB comme côtés consécutifs car : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

La somme de deux vecteurs de même origine est donc indépendante de leur ordre. Il en est de même de la somme de deux vecteurs quelconques.

195. Différence de deux vecteurs. — ***C'est le vecteur qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier.***

Ainsi (fig. 175) : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la différence des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$. Notons que :

Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal à la différence des vecteurs joignant un point quelconque O, successivement à son extrémité et à son origine.

D'autre part : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ donc : $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}$.

Pour retrancher un vecteur $\overrightarrow{OA}$ il suffit d'ajouter son opposé $\overrightarrow{AO}$.

196. Projection d'un vecteur. — Par définition, la projection orthogonale sur un plan P, d'un vecteur donné $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ qui joint la projection A′ de son origine à la projection B′ de son extrémité (fig. 176). Signalons les propriétés suivantes :

1° ***Les projections sur un même plan de deux vecteurs égaux sont deux vecteurs égaux.***

En effet (fig. 177), si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, le quadrilatère ABDC est un parallélogramme et il en est de même de sa projection A′B′D′C′, ce qui entraîne :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}.$$

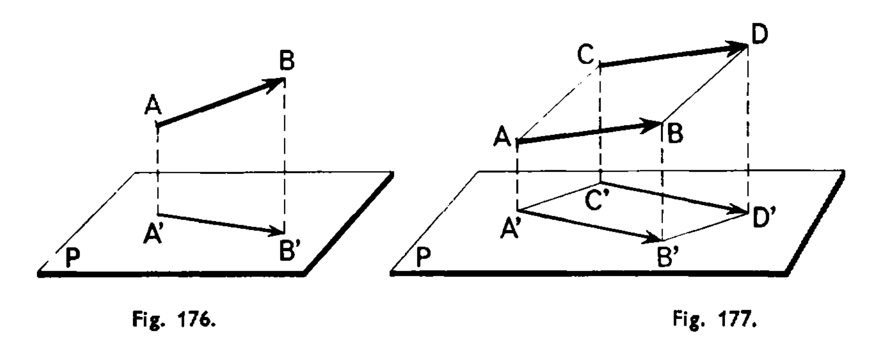


Fig. 176. Fig. 177.

Si le parallélogramme A′B′D′C′ est aplati, on construit : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Les égalités : $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{C'D'}$ montrent que l'on a encore :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}.$$

2° ***Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal à celui de leurs projections.***

Soient $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ les projections des vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sur le

plan P (fig. 178). Construisons sur la droite AB le vecteur $\overrightarrow{EF}$ égal à $\overrightarrow{CD}$, et se projetant suivant $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{C'D'}$. D'après le théorème de Thalès (n° 8) on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{E'F'}} \quad \text{soit (n° 193) :} \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{E'F'}} \quad \text{donc :} \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}$$

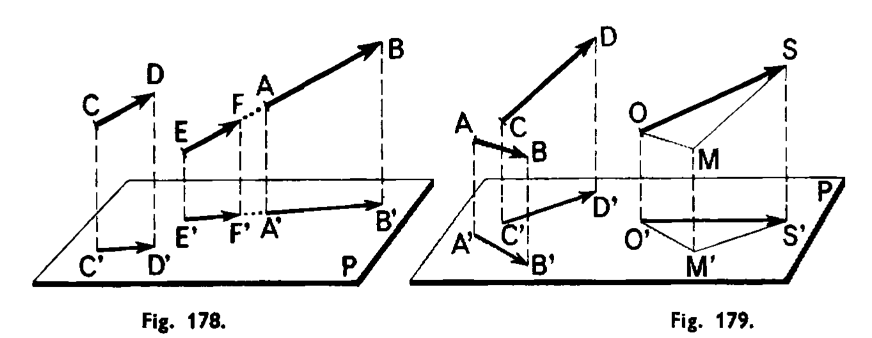


Fig. 178. Fig. 179.

3° ***La projection de la somme de deux vecteurs est égale à la somme des projections de ces deux vecteurs.***

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ se projetant en $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ (fig. 179). Construisons : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{CD}$, soit : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. En désignant par O', M' et S' les projections de O, M et S, on obtient :

$$\overrightarrow{O'S'} = \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{M'S'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'}.$$

EXERCICES

303. Un point inconnu M se projette en A sur le plan P et en B sur une droite D non parallèle à P. Construire ce point M.

304. Le point M se projette sur les plans sécants P et Q respectivement en A et B
1° Montrer que le plan MAB est perpendiculaire à la fois aux plans P et Q.
2° Montrer que si on se donne les points A et B dans un plan perpendiculaire à l'intersection des plans P et Q, le point M est déterminé.

305. Le parallélogramme ABCD se projette en A'B'C'D' sur le plan P.
1° Que peut-on dire du quadrilatère A'B'C'D'.
2° Quelle est la projection sur le plan P du centre O du parallélogramme ABCD?

306. 1° L'angle droit BAC a le côté AB dans le plan P. Montrer que la projection de cet angle sur le plan P est un angle droit.

2° Que peut-on en déduire pour la projection sur le plan P d'un angle droit dont un côté est parallèle au plan P?

307. 1° L'angle BAC a un côté AB dans le plan P et sa projection sur ce plan est un angle droit. Montrer que l'angle BAC est droit.

2° Que peut-on dire d'un angle dont la projection sur le plan P est un angle droit et qui a un côté parallèle au plan P?

308. 1° Le rectangle ABCD a son côté AB dans le plan P. Montrer que sa projection sur le plan P est un rectangle.

2° Montrer que cette propriété reste vraie si AB est parallèle au plan P.

3° Montrer que si $AB < AD$ la projection du rectangle ABCD peut être un carré.

309. Les points A', B', C' et D' sont d'un même côté du plan P et se projettent respectivement sur ce plan en A, B, C et D sommets d'un parallélogramme.

1° Montrer que les milieux I et J de A'C' et B'D' ont même projection sur P.

2° Montrer que si $AA' + CC' = BB' + DD'$ les quatre points A', B', C', D' sont dans un même plan. Démontrer la réciproque.

3° Montrer que, dans ce cas, le quadrilatère A'B'C'D' est un parallélogramme.

— Calculer la longueur A'B' de la projection du segment AB sur le plan P connaissant $AB = l$ et l'angle α de AB avec A'B', dans les cas suivants :

310. $l = 30$ cm; $\alpha = 60°$ **311.** $l = 42$ cm; $\alpha = 45°$ **312.** $l = 15$ cm; $\alpha = 30°$.

313. $l = 18$ cm; $\alpha = 25°$ **314.** $l = 53$ cm; $\alpha = 43°$ **315.** $l = 12{,}5$ cm; $\alpha = 35°$.

316. Les segments OA, OB, OC sont perpendiculaires deux à deux et $OA = 8$ cm; $OB = 7{,}5$ cm; $OC = 10$ cm. Le point O se projette en H sur le plan ABC.

1° Montrer que BC est perpendiculaire au plan OAH et que H est l'orthocentre du triangle ABC.

2° Calculer la hauteur issue de O du triangle OBC puis la longueur OH.

317. Le tétraèdre ABCD est tel que $AB = CD = a$ et $AC = AD = BC = BD$. Les hauteurs issues de A et B dans les triangles ACD et BCD ont pour valeur commune a.

1° Montrer que la droite IJ qui joint les milieux I et J de AB et CD est perpendiculaire à AB et à CD.

2° Montrer que le sommet A se projette sur la face BCD en un point H de la droite BJ. Évaluer AH en fonction de a.

— Construire la somme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ puis calculer sa longueur connaissant $OA = a$; $OB = b$ et l'angle $AOB = \alpha$ dans les cas suivants :

318. $a = 12$; $b = 5$; $\alpha = 90°$ **319.** $a = 45$; $b = 60$; $\alpha = 90°$.

320. $a = b = 32$; $\alpha = 120°$ **321.** $a = b = 60$; $\alpha = 60°$.

322. $a = 5$; $b = 10$; $\alpha = 60°$ **323.** $a = \sqrt{3}$; $b = 2$; $\alpha = 30°$.

324. 1° Étant donné deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, construire pour différentes valeurs du nombre relatif k, les vecteurs :

$$\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}.$$

2° Démontrer que dans tous les cas : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

325. Soient I et J les milieux respectifs des segments OA et OB, et soit M le milieu de AB. Démontrer que :

1°
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

2°
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

326. Par définition : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$. En déduire la construction du vecteur $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$ connaissant les trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$.

Montrer que l'on a : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$. Conclusion?

327. On considère un parallélogramme ABCD de centre I et un point M quelconque.

1° Démontrer que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

2° En déduire que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\,\overrightarrow{MI}$.

328. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. On prolonge la médiane AM d'une longueur MD égale à GM.

1° Montrer que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

2° En déduire que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

3° Si O désigne un point quelconque, établir la relation :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}.$$

329. Soit I le milieu du segment joignant les milieux M du segment AB et N du segment CD.

1° Montrer que : $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$ et $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$.

et en déduire que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 0$.

2° Établir que, quel que soit le point O, on a la relation :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\,\overrightarrow{OI}.$$

PROBLÈMES DE RÉVISION

330. Soit C un point pris sur un cercle de diamètre AB de rayon R. CA coupe en B′ la tangente en B et CB coupe en A′ la tangente en A.

1° Montrer que les triangles AA′B et ABB′ sont semblables.

2° Démontrer la relation : $AA'.BB' = 4\,R^2$.

331. On donne un angle xOy et deux demi-droites Ou et Ov symétriques par rapport à la bissectrice de xOy et intérieures à cet angle. D'un point A de Ou on mène les perpendiculaires AM et AN à Ox et Oy. D'un point A′ de Ov on mène les perpendiculaires A′M′ et A′N′ à Ox et Oy.

1° Démontrer que les triangles OA′N′ et OAM sont semblables, de même que les triangles OA′M′ et OAN.

2° En déduire les égalités $AM.A'M' = AN.A'N'$ et $OM.OM' = ON.ON'$.

332. On considère un cercle de centre O et une droite D extérieure à ce cercle. Par un point A de la droite D on mène les tangentes AB et AC au cercle O. La perpendiculaire OE à la droite D coupe la corde BC en I et OA coupe BC en H.

1° Comparer les triangles OIH et OEA. En déduire la relation $OI.OE = OH.OA$.

2° Comparer les triangles OBH et OBA. En déduire la relation $OH.OA = OB^2$.

3° Montrer que le point I reste fixe lorsque le point A se déplace sur la droite D.

333. Soient b et c les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est a et la hauteur relative à l'hypoténuse h. Démontrer que le triangle qui a pour côtés $b + c$, h et $a + h$ est aussi rectangle.

334. Soient un triangle ABC et un point variable M de la droite BC.

1° Pour une position donnée de M construire les centres O et O′ des cercles circonscrits aux triangles AMB et AMC.

2° Comparer les angles AOB et AO′C à l'angle aigu que fait la droite MA avec la droite BC puis comparer les triangles AOB et AO′C. Conséquences?

3° Montrer que le triangle OAO′ est semblable au triangle ABC. Pour quelle position de M les rayons OA et O′A ont-ils la plus petite valeur?

335. Les médiatrices des côtés d'un losange ABCD forment un quadrilatère A′B′C′D′ dont les sommets sont situés sur les diagonales du losange ABCD.

1° Démontrer que A′B′C′D′ est un losange formé de quatre triangles rectangles semblables aux quatre triangles rectangles formés par ABCD et ses diagonales.

2° Un côté du losange ABCD étant égal à 4 cm, on demande de calculer les longueurs de ses diagonales de sorte qu'un sommet du losange ABCD soit confondu avec un sommet du losange A′B′C′D′. Y aura-t-il d'autres sommets confondus?

336. On donne une demi-circonférence de centre O, de diamètre AB = 6 cm et un point P sur la tangente en A à cette demi-circonférence. De P on mène l'autre tangente PM qui coupe la droite AB en C.

1° Évaluer la longueur des segments PA, PM, PO, OC dans le cas où l'angle APM est égal à 60°.

2° La droite OM coupe AP en D. Montrer que les droites PO et CD sont perpendiculaires et que le triangle PCD est isocèle.

337. Soient O et O′ deux cercles sécants, A un de leurs points communs. Une tangente commune touche le premier cercle en P, le second en Q. PA recoupe le cercle O′ en M et QA recoupe le cercle O en N.

1° Établir la similitude des triangles PAQ et PQM puis celle des triangles PAQ et NPQ.

2° Établir la relation $\overline{PA}.\overline{PM} = \overline{QA}.\overline{QN}$.

338. Sur un segment AB de longueur a, on prend un point C tel que $AC = \frac{a}{3}$, puis on décrit un demi-cercle ayant AB pour diamètre. En C on mène la perpendiculaire à AB. Elle coupe le cercle en D. La droite OH perpendiculaire menée du centre O du demi-cercle à la corde AD coupe CD en E.

1° Déterminer graphiquement le point C.

2° Connaissant a calculer les longueurs CD et OH.

3° Trouver sur la figure 3 triangles semblables au triangle ACD et montrer que le quadrilatère CODH est inscriptible.

339. Soient un cercle de centre O, un rayon OC, une corde AB parallèle à OC qui coupe en D la tangente en C au cercle, DA étant plus grand que DB. Soient M, N, P, les milieux respectifs de BC, CA, AB.

1° *a*) Prouver que le triangle BMD est isocèle; *b*) Prouver que les angles CAD et CBD sont complémentaires; *c*) Nature du quadrilatère MNPD.

2° On suppose que la corde AB se déplace parallèlement au rayon OC fixe. Sur quelles courbes se déplacent le point P et le centre du cercle circonscrit au triangle MNP? *(B.E.P.C.)*

340. Soit un losange ABCD, où A et C sont deux sommets opposés. Sur AB et CD on prend respectivement les points E et F tels que : $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{3}$.

1° Montrer que EF coupe BD en son milieu.

2° On prolonge EF dans les deux sens, au-delà de E et de F. On obtient sur la droite DA le point I et sur la droite BC le point K. Montrer que EI = EF = FK.

3° Montrer que le triangle DBI est rectangle. Calculer BI en supposant que l'angle A du losange vaut 60° et que le côté AB égale a. *(B.E.P.C.)*

341. Construire un triangle isocèle ABC dont la base BC mesure 4 cm et dont les côtés AB et AC mesurent chacun 6 cm. Construire ensuite le cercle circonscrit à ce triangle. (Une figure claire et précise dispensera de toute explication.)

2° Une corde variable issue de A coupe le cercle circonscrit en M. On désigne par D la projection de B sur AM et par P l'intersection de BD et de CM. Comparer les angles DMP et DMB aux angles à la base du triangle ABC. En conclure que P est symétrique de B par rapport à AM.

3° Sur quelle ligne se déplace P quand la corde AM tourne autour du sommet A? Construire cette ligne; par quels points de la figure passe-t-elle?

4° Sur quelle ligne se déplace, au cours de ce mouvement, un point P′ de AP, situé entre A et P, tel que : $\frac{AP'}{AP} = \frac{1}{3}$? *(B.E.P.C.)*

342. Soit BC un diamètre fixe d'un cercle de centre O et de rayon R.

1° On prend un point M variable sur le cercle. La bissectrice intérieure de l'angle BMC coupe BC en D et le cercle en E. La bissectrice extérieure de l'angle BMC coupe le cercle en E′. Préciser la position des points E et E′.

2° On désigne par I le centre du cercle inscrit au triangle BMC. Calculer l'angle BIC et montrer que EI = EB = EC.

3° La parallèle à ME, menée par le point C, coupe le prolongement de BM en N. Calculer l'angle MNC et trouver la ligne décrite par le point N.

4° On fixe le point M de telle façon que CM = R. Calculer, en fonction de R, la longueur BM; le rapport $\frac{DB}{DC}$ puis les longueurs DB et DC. *(B.E.P.C.)*

343. Deux cercles O et O' tangents extérieurement ont pour rayons OA = 3 cm, O'A = 1 cm. Par le point de contact A, on mène deux cordes perpendiculaires, AB dans le cercle O et AC dans le cercle O'.

1° Montrer que OB est parallèle à O'C.

2° En déduire que, lorsque AB et AC varient, la droite BC passe par un point fixe, que l'on déterminera.

3° On pose BC = *l*. Déterminer les points B et C. Discuter. *(B.E.P.C.)*

344. On donne un cercle de centre O, de diamètre AB = 2 cm.

On joint le point A à un point quelconque M, variable sur le cercle et on prolonge AM d'une longueur MP = 2 AM.

1° La perpendiculaire en P à AP rencontre la droite AB en H. Montrer que PH est parallèle à MB. Calculer BH. En conclure que le point H est fixe lorsque M décrit le cercle donné.

2° Montrer que la courbe décrite par le point P lorsque M décrit le cercle est un cercle. Où est situé son centre? Quel est son rayon? Quelle position occupe-t-il par rapport au cercle initial?

3° On suppose maintenant que MB = 1 cm. Calculer PH. Si P' est la projection de P sur BH, calculer P'H et PP' *(B.E.P.C.)*

345. On considère un trapèze rectangle ABCD. Ses bases sont AB et CD, le côté AD est perpendiculaire aux bases. On suppose que les diagonales de ce trapèze sont perpendiculaires et soit I leur point commun.

1° Comparer les triangles ABD et DAC. En déduire la relation $AB.CD = AD^2$.

2° On trace le cercle circonscrit au triangle ADI. La tangente en I à ce cercle coupe les bases aux points E et F. Montrer que ces points sont les milieux des bases.

3° On prolonge AB du côté de A d'une longueur AH = CD. Que peut-on dire du triangle DBH? En déduire une construction du trapèze ABCD, connaissant la somme de ses bases et sa hauteur. Faire cette construction lorsqu'on donne AB + CD = 6,5 cm, AD = 3 cm. *(B.E.P.C.)*

346. Soit M le milieu du côté BC d'un triangle ABC. On suppose que les angles BAM et BCA sont égaux.

1° Montrer que les triangles ABM et CBA sont semblables.

2° Établir la relation : $\overline{BC}^2 = 2\,\overline{AB}^2$. Comparer BC à la diagonale d'un carré de côté AB.

3° Quelle est la position relative de la droite BA et du cercle passant par les points A, M, C? La parallèle à MA issue de C coupe la droite AB en D. Quelle remarque peut-on faire sur le cercle passant par les points A, D, C?

4° Soit I le pied sur BC de la bissectrice intérieure de l'angle BAC et J le pied sur AB de la bissectrice intérieure de l'angle AMB. Prouver que IJ est parallèle à AC. *(B.E.P.C.)*

347. Soit un cercle de centre O et dont le rayon R = 5 cm.

1° Indiquer le moyen de mener une corde AB telle que l'arc qu'elle sous-tend soit égal à 150° (ne pas se servir du rapporteur).

2° Sur le plus grand des deux arcs AB, déterminer un point C tel que, si l'on abaisse la perpendiculaire CH sur AB on ait AH = CH.

3° Calculer les arcs CB, AC, et les trois côtés du triangle ABC.

4° La droite CO coupe la droite AB en D et l'arc AB en E. Calculer l'angle ACE. Démontrer que les triangles ADE et ACB sont semblables. *(B.E.P.C.)*

348. Soit un cercle de centre O, de rayon R, et un point P tel que OP = 2 R.

1° Déterminer un diamètre MN de façon que le triangle PMN soit rectangle en M.

2° Calculer les côtés de ce triangle en fonction de R.

3° La droite PN recoupe le cercle en K. Calculer PK.

4° Le diamètre MN tourne autour de O; quelle est la ligne décrite par le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur MN? *(B.E.P.C.)*

349. Soit ABC un triangle rectangle tel que les côtés de l'angle droit aient pour longueurs : AB = 4, AC = 3.

On joint les milieux A', C', B' des côtés BC, AB, AC.

1° Comparer les triangles ABC et A'B'C'.

2° Calculer BC et en déduire la longueur de B'C'. Calculer ensuite la hauteur A'P de A'B'C' et la hauteur AQ de AB'C'.

3° Étudier ensuite le quadrilatère A'PAQ. Calculer ses dimensions.

(B.E.P.C.)

350. On donne un segment de droite AB = 5 cm, de milieu O. On trace trois demi-droites Ax, Oz et By perpendiculaires à AB et de même sens.

On porte sur Oz un segment OE = 2/3 de AB, puis par E on trace une sécante variable qui coupe la demi-droite Ax en C et la demi-droite By en D.

1° Construire, sans commentaires, la figure (AB = 5 cm).

2° Nature des quadrilatères ABDC.

3° Ces quadrilatères n'ont pas tous le même périmètre. Comment faut-il choisir la sécante CED pour que le périmètre ait la plus grande valeur possible et ensuite la plus petite valeur possible? Calculer le périmètre dans ces deux cas. *(B.E.P.C.)*

351. On considère un cercle de centre O, de rayon R, un point fixe A et un point B variable sur cette circonférence; la perpendiculaire en A à AB recoupe le cercle en C.

1° Que peut-on dire des deux points B et C? Trouver la courbe décrite par le pied H de la perpendiculaire menée de A sur BC.

2° On donne AH = $\frac{R}{2}$. Construire le triangle ABC correspondant. Quel est le polygone régulier inscrit dont le côté a même longueur que le petit côté de l'angle droit de ce triangle?

3° Calculer en fonction de R les segments BH, CH, AB, AC. *(B.E.P.C.)*

352. On considère un cercle C, de centre O, de diamètre AB = 4 cm et un point P situé sur la droite AB à 4 cm du point O (B est entre O et P). Par P et les extrémités M et N d'un diamètre variable du cercle C on fait passer un cercle C'. Ce cercle coupe OP en dehors de P en un point I.

1° Montrer que le produit $\overline{OI}.\overline{OP}$ est constant et que le point I a une position sur OP qui ne dépend pas du diamètre variable MN que l'on considère. En déduire la ligne décrite par le centre O' du cercle C' quand MN tourne autour de O.

2° On suppose maintenant que le diamètre MN est fixe et que l'angle NOP est égal à 60°. Montrer que, dans ce cas, la droite PN est tangente au cercle C. Calculer PN et le segment BT de la tangente en B au cercle C limité en B et à l'intersection T de cette tangente avec PN. *(B.E.P.C.)*

353. On donne trois points fixes en ligne droite, le point B étant entre A et C. Deux points M et N variables décrivent la perpendiculaire (D) en C à AC de façon que AM et BN se coupent à angle droit.

1° Montrer que AN et BM sont perpendiculaires. Démontrer que les triangles CAM et CNB sont semblables et que le produit $\overline{CM}.\overline{CN}$ reste constant quand M et N varient. En déduire que le cercle de diamètre MN passe par deux points fixes.

2° Montrer que le cercle circonscrit au triangle AMN passe par un deuxième point fixe et qu'il en est de même du cercle BMN. *(B.E.P.C.)*

354. On porte sur une droite deux segments consécutifs AB = 5 cm, BC = 12 cm, puis on élève d'un même côté de AC les perpendiculaires à cette droite, sur lesquelles on porte : AP = 4 cm; CM = 15 cm. On joint BM et BP.

1° Comparer les rapports $\frac{AP}{AB}$ et $\frac{CB}{CM}$ puis établir la similitude des triangles BAP et MCB.

2° Démontrer que le triangle PBM est rectangle et calculer ses côtés.

3° Soit H la projection de B sur MP, que pensez-vous des quadrilatères PABH et BCMH?

4° Démontrer que le triangle AHC est rectangle. *(B.E.P.C.)*

355. Soient deux segments de droite BC et DE qui se coupent en A. On a AB = 28 mm, AD = 21 mm, AC = 72 mm, AE = 96 mm, BD = 35 mm.

1° Les triangles ABD et AEC sont-ils semblables? Calculer la longueur CE.

2° Trouver les angles égaux dans la figure et en déduire une propriété du quadrilatère BDCE.

3° On joint CD et EB qui se coupent en F. Montrer que les triangles ADC et ABE sont semblables.

4° En déduire que les triangles DFE et BFC sont semblables. Quel est le rapport de similitude? *(B.E.P.C.)*

356. Dans l'intérieur de l'angle A d'un triangle isocèle ABC (AB = AC) on mène une demi-droite AEF rencontrant la base BC en E et le cercle circonscrit à ABC en F.

1° Montrer que les triangles ABE et AFB sont semblables. En déduire que le produit $\overline{AE}.\overline{AF}$ reste constant quand E parcourt BC.

2° Montrer que les cercles circonscrits à BEF et à EFC sont tangents respectivement à AB et à AC.

3° La droite CH perpendiculaire à AF rencontre FB en I. Montrer que AF est médiatrice de CI. En déduire la courbe décrite par le point I lorsque E décrit le côté CB du triangle fixe ABC.

357. Sur un segment AB de longueur a, on prend un point C tel que AC = $\frac{a}{3}$. Puis on décrit un demi-cercle, de centre O, ayant AB pour diamètre. Au point C, on élève a perpendiculaire à AB qui coupe le demi-cercle précédent en D. On mène de O la perpendiculaire OH à la corde AD.

1° Calculer, en fonction de a, les longueurs CD, AD, BD et OH.

2° Montrer que le quadrilatère CODH est inscriptible.

3° Le cercle de diamètre CD recoupe AD en E et BD en F. Nature du quadrilatère CEFD? Calculer les longueurs DE et DF. *(B.E.P.C.)*

358. On donne un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2 R et la tangente Ax au point A. D'un point P quelconque, pris sur Ax, mais tel que PA > R, on mène la deuxième tangente au cercle, soit PM.

1° Démontrer que PO est bissectrice de l'angle AOM, et que BM est parallèle à OP.

2° Du point O, on mène la perpendiculaire à AB, qui coupe en N le prolongement de BM. Démontrer que le quadrilatère OBNP est un parallélogramme et que le quadrilatère OMNP est un trapèze isocèle.

3° On donne AP = $\frac{4R}{3}$. Calculer en fonction de R les segments BN, AM, BM.

(B.E.P.C.)

359. On considère un cercle de centre O et une droite (D) extérieure. Soit E le point d'intersection de D avec le diamètre qui lui est perpendiculaire. Par un point A de (D) on mène les deux tangentes AB et AC. La corde BC coupe OA en H et OE en I.

1° Démontrer la relation : OI.OE = OH.OA.

2° Démontrer la relation : OH.OA = $\overline{OB}^2$.

3° En déduire que le point I est fixe lorsque le point A se déplace sur la droite (D).
(B.E.P.C.)

360. Soit O le cercle de centre O et de rayon R. Soient AB un diamètre fixe et C un point variable sur le cercle. On prolonge BC au-delà de C d'une longueur CD = BC.

1° Montrer que, lorsque C décrit le cercle O, le point D décrit un cercle de centre A.

2° Montrer que AD passe par le point C' symétrique de C par rapport à AB lorsque l'angle ABC = 30°.

3° C ayant à nouveau une position quelconque sur le cercle O, calculer les côtés du triangle ABC en fonction de R et de l'angle ABC = α. *(B.E.P.C.)*

361. Construire un triangle ABC tel que AB = 8 cm, $\widehat{ABC}$ = 60°, $\widehat{BAC}$ = 75°. Tracer la hauteur AH.

1° Calculer BH, AH, HC, BC et AC.

2° Soit un point M variable du segment BC. La perpendiculaire menée de M à AB coupe AB en P; la perpendiculaire menée de M à AC coupe AC en Q.

Montrer que les cinq points A, P, H, M, Q sont sur un même cercle. Préciser le centre de ce cercle. Quand M décrit le segment BC, sur quelle ligne fixe se déplace ce centre?

3° Quand M varie le triangle HPQ varie. Montrer qu'il reste semblable à lui-même.
(B.E.P.C.)

362. Soit BC un diamètre d'un cercle de centre O et de rayon R. On marque sur ce cercle le point D tel que l'arc BD = 120°. La perpendiculaire DI à BC recoupe le cercle en E. Les droites BD et EC se coupent en A.

1° Montrer que DO est bissectrice de l'angle BDE, que DO et AC sont parallèles et que D est le milieu de AB.

2° Calculer en fonction de R les segments DC, BD, OI, AB, AC.

3° Construire le cercle circonscrit au triangle ABC. Préciser la position de son centre O' et calculer son rayon R' en fonction de R. *(B.E.P.C.)*

363. On donne un cercle (C) de centre O, de rayon R et une droite (D) extérieure à (C). D'un point quelconque M de (D) on mène les tangentes MA et MB au cercle (C). On appelle K le pied de la perpendiculaire menée de O sur (D), H et I les points d'intersection de AB vec OM et OK.

1° Comparer les triangles OHI et OMK. En déduire une relation entre OI, OH OM et OK.

2° Montrer que : OH.OM = R^2.

3° Montrer que I reste fixe quand M décrit la droite D.

4° Quelle ligne décrit le point H quand M décrit la droite D?
(B.E.P.C.)

364. Soient A, M, B trois points alignés, M étant situé entre A et B. AM mesure 4 cm, MB mesure 3 cm. Un angle droit CMD de sommet M coupe en C la perpendiculaire à AB en A et en D la perpendiculaire à AB en B.

1° Montrer que les triangles AMC, BMD sont semblables.

2° On donne en outre AC = 2 cm; préciser le rapport de similitude des triangles AMC et BDM. Calculer BD, MC et MD. On désigne par N le point d'intersection de la droite CD avec la droite AB, calculer aussi AN et BN.

3° Montrer que le cercle de diamètre CD coupe la droite AB en deux points, dont on précisera les positions. *(B.E.P.C.)*

365. Sur un cercle de centre O, de rayon 3 cm, on donne trois points fixes A, B et C. Un point M décrit l'arc ACB.

1° Démontrer que la bissectrice de l'angle AMB passe par un point fixe D, milieu de l'arc AB.

2° On appelle I le centre du cercle inscrit dans le triangle AMB et J celui du centre du cercle exinscrit dans l'angle M. Démontrer que le quadrilatère AIBJ est inscriptible dans un cercle de centre D.

3° Comparer les triangles MAI et MJB; en déduire que MA × MB = MI × MJ.

4° Quelle doit être la valeur de l'arc ACB pour que le cercle circonscrit au quadrilatère AIBJ soit égal au cercle (O)? Dans ce cas, calculer la longueur du segment AB.

(B.E.P.C.)

366. On considère un triangle ABC dans lequel AB = 2 AC.

On appelle D le point situé sur le prolongement de AC au-delà de C, tel que AD = 2 AB. On désigne par I le milieu de AD et l'on a ainsi IA = ID = AB.

1° Établir la relation $\overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AD}$.

2° Montrer que les deux triangles ABC et ADB sont semblables. En déduire que les angles ABC et BDA sont égaux.

3° Montrer que AB est la tangente en B au cercle circonscrit au triangle BCD.

4° On mène les hauteurs BH et DK dans les triangles ABC et ADB. Quelle est la valeur du rapport $\frac{AC.BH}{AB.DK}$? *(B.E.P.C.)*

367. On considère un triangle ABC, rectangle en B, dans lequel AB = 15 cm et AC = 25 cm. Soit D, le point du segment BC, entre B et C, tel que $\frac{DB}{DC} = \frac{3}{5}$.

1° Calculer BC, DB et DC. (On trouvera DB = 7,5.)

2° Par le point C on mène la parallèle à DA, qui coupe AB en E. Calculer AE et déterminer la nature du triangle AEC. En déduire que AD est la bissectrice de l'angle BAC.

3° Le cercle de diamètre AD recoupe AC en M. Calculer MA, MC et MD.

4° Calculer AD à 0,01 près. *(B.E.P.C.)*

368. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2 R. On construit en A et B les deux tangentes Ax et By et l'on prend un point C sur la demi-circonférence. AC coupe By en N et BC coupe Ax en M.

1° Démontrer que les deux triangles AMB et ANB sont semblables et en déduire la relation : AM.BN = 4 R^2.

2° Soient D le milieu de AM et E le milieu de BN. Démontrer que les points D, C, E sont en ligne droite et que la droite DE est tangente en C à la demi-circonférence.

3° Dans le cas où l'angle CAB vaut 60°, calculer, en fonction de R, les côtés et les diagonales du trapèze AMNB. *(B.E.P.C.)*

369. Soit un triangle ABC dans lequel : CA = CB = 5 cm, AB = 6 cm. Soient I le milieu de AB et J le point de AC tel que AJ = 3,6 cm.

1° Prouver que AIJ et ABC sont des triangles semblables. Montrer que le quadrilatère BIJC est inscriptible dans un cercle de diamètre BC.

2° Prouver que ABJ et ACI sont semblables et calculer IJ, IC, BJ.

3° Quelle est la hauteur du triangle ABC relative au côté BC? Calculer sa longueur.

(B.E.P.C.)

370. On considère un losange ABCD dont la base AB est fixe (AB = a).

1° Sur quelle ligne se déplace le point de rencontre O, de ses diagonales, lorsque CD varie.

2° On mène par D la parallèle à AC. Montrer qu'elle coupe la droite AB en un point fixe B'.

3° On suppose que l'angle BAD = 60°. Calculer les longueurs des diagonales AC et BD en fonction de a. On désigne par E le second point d'intersection de la droite B'D et du cercle circonscrit au triangle ABD; évaluer B'E.

4° Montrer que, pour que la droite B'D soit tangente au cercle circonscrit au triangle ABD, il faut que le triangle AOD soit isocèle. Que peut-on dire alors du losange ABCD? *(B.E.P.C.)*

371. Soit un triangle ABC, rectangle en A et isocèle. Une demi-droite Bx, intérieure à l'angle B, coupe AC en D. La perpendiculaire menée de C à Bx rencontre Bx en E et la droite AB en F.

1° Montrer que la droite FD est perpendiculaire à BC et calculer l'angle BFD.

2° Montrer que les points A, D, E, F appartiennent à un même cercle, dont on précisera le centre.

3° Montrer que les arcs AF et AD de ce cercle sont égaux. Que peut-on en conclure pour la demi-droite issue de E et passant par A?

4° Si Bx balaie tout l'angle B du triangle ABC, quelle est la ligne décrite par le point E?

5° Dans le cas particulier où $\widehat{ABx} = 30°$, calculer, en fonction de BC = a, les longueurs AB, AD et le rayon du cercle passant par A, D, E, F. *(B.E.P.C.)*

372. On considère un triangle ABC, rectangle en A, et tel que BC = 8 cm et $\widehat{B} = 30°$. On prolonge BA au-delà de A de la longueur $AD = \frac{AB}{2}$. La parallèle menée de D à BC coupe la droite AC en E. Les droites BE et CD se coupent en I.

1° Calculer les longueurs AC, AB et CD. Montrer que les triangles ABC et ADE sont semblables et calculer les segments AE, ED et BE.

2° Montrer que $\frac{ID}{IC} = \frac{1}{2}$ et que BD est médiane du triangle IBC. Que représente le point A pour le triangle IBC? La droite IA coupe BC et DE en M et N. Que peut-on dire des points M et N?

3° Où sont situés les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et ADE? Montrer que ces cercles sont tangents extérieurement. *(B.E.P.C.)*

373. On donne un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2 R. C étant un point quelconque de ce demi-cercle, on trace la corde AC, que l'on prolonge au-delà de C d'une longueur CD = CB.

1° Lorsque C décrit le demi-cercle de centre O, montrer que le point D se déplace sur un cercle, dont on précisera le centre I et le rayon.

2° Quelle portion du cercle de centre I décrit le point D lorsque C décrit le demi-cercle de diamètre AB?

3° Le point C est choisi tel que la corde AC ait la valeur $\frac{3\,R}{2}$ $\left(AC = \frac{3\,R}{2}\right)$. Soit H la projection du point C sur AB. Calculer en fonction de R les longueurs des segments AH, HB, CB, CH et BD. *(B.E.P.C.)*

374. On donne sur une droite trois points fixes A, B, C disposés dans cet ordre et on mène par A et B deux droites variables, perpendiculaires entre elles et qui coupent respectivement en M et N, la perpendiculaire en C à la droite AB.

1° Démontrer que les droites AN et BM sont perpendiculaires. Quel est l'orthocentre du triangle AMN, du triangle BMN?

2° Démontrer que le point B' symétrique de B par rapport à la droite MN, se trouve sur le cercle AMN. Sur quelle ligne se déplace le centre O de ce cercle?

3° Démontrer que les triangles ACM et NCB sont semblables et en déduire que : CM.CN = CA.CB.

4° Le cercle de diamètre MN coupe la droite AB en I et J. Comparer les triangles MCI et ICN et montrer que : $\overline{CI}^2 = \overline{CJ}^2 =$ CM.CN. En déduire que les points I et J sont fixes. *(B.E.P.C.)*

375. On donne un triangle ABC et son cercle circonscrit, de centre O. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe BC en E et le cercle circonscrit en F.

1° Comparer les triangles ABF et AEC. En déduire AB.AC = AE.AF.

2° Indiquer pourquoi $\overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EA}.\overline{EF}$ (en énonçant seulement le théorème utilisé).

3° Comparer les rapports $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{EB}{EC}$ (énoncer seulement le théorème utilisé).

4° Si AB = 5 cm, AC = 3 cm, BC = 4 cm, que peut-on dire du triangle ABC? Quel est alors le rayon de son cercle circonscrit? Calculer la longueur de la bissectrice AE, en utilisant les relations trouvées ci-dessus. On pourra poser : AE = x, AF = y, EB = m, EC = n et calculer d'abord m et n. *(B.E.P.C.)*

376. Soit un triangle ABC tel que BC = a et dont les angles B et C vérifient la relation B = C + 90°.

1° On suppose, dans cette première question seulement, que $\widehat{A} = 30°$. Calculer dans ce cas particulier les angles du triangle ABC; calculer aussi en fonction de a les côtés AB et AC.

2° On trace le cercle circonscrit (O) au triangle ABC et l'on désigne par D l'intersection avec ce cercle de la perpendiculaire menée à la droite BC au point B.

a) Quelle est la position particulière du point A sur l'arc BD?

b) Montrer que la tangente en A au cercle (O) est perpendiculaire à la droite BC.

3° H désignant le pied de la hauteur AH et R la mesure du rayon du cercle (O), démontrer les relations : $\overline{AH}^2 = \overline{HB}.\overline{HC}$ et $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4\,R^2$. *(B.E.P.C.)*

377. Soient une droite fixe (D) et sur cette droite deux points fixes A et B. On construit, du même côté par rapport à (D), deux angles aigus de grandeur variable mais toujours égaux entre eux : BAx = ABy = α.

Ax et By se coupent en C. Soient H le pied de la perpendiculaire menée de C à AB et M et N les pieds respectifs des perpendiculaires menées de H à AC et BC.

1° Montrer que MN est parallèle à AB. Indiquer comment on peut construire la figure pour que MN ait une longueur donnée l. La longueur l peut-elle être choisie de façon quelconque?

2° Montrer qu'il existe un cercle de centre O passant par les quatre sommets du quadrilatère CMHN (cercle circonscrit) et un cercle de centre I tangent aux quatre côtés de ce même quadrilatère (cercle inscrit). Situer avec précision O et I sur la figure.

3° On donne maintenant BAx = ABy = 30° et AB = 2 a. Calculer en fonction de a les segments CA, CH, CM, MN et le rayon r de son cercle inscrit.

(B.E.P.C.)

TRAVAUX PRATIQUES

TRAVAUX PRATIQUES

I. ARITHMÉTIQUE

n	n^2
100	**10 000**
	201
101	**10 201**
	203
102	**10 404**
	205
103	**10 609**
	207
104	**10 816**

1. *Table des carrés des nombres entiers supérieurs à* 100. Dans la colonne n, écrire les entiers 100, 101, 102, etc. Dans la colonne n^2, commencer par écrire (légèrement au crayon) en interligne, la suite des nombres impairs $2n + 1$ soit : 201, 203, 205, etc. L'identité $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$ montre que le carré de 103 est celui de 102 augmenté de 205. On obtient ainsi rapidement par addition les carrés successifs cherchés. Gommer ensuite les nombres intermédiaires écrits au crayon.

2. Établir le tableau de correspondance entre les nombres 0; 0,5; 1; 1,5..... 5 et leurs carrés. Construire le graphique correspondant (unité = 1 cm) sur du papier millimétrique. Utiliser ce graphique pour rechercher le carré ou la racine carrée d'un nombre donné.

3. Calculer à 0,0001 près les racines de 2 et 3. Comparer la somme des nombres obtenus au nombre π et au nombre $\frac{22}{7}$. Calculer de même $1{,}8 + \sqrt{1{,}8}$.

4. Découper deux carrés, l'un de côté 5 cm, l'autre de côté inconnu x dans une feuille de tôle. Peser les deux surfaces obtenues. En déduire l'aire du carré de côté x, puis son côté. Comparer le résultat obtenu à la mesure directe de ce côté.

5. Utiliser la table de cubes des nombres entiers de 1 à 100 pour obtenir la racine cubique entière d'un nombre inférieur à 10^6.

6. Plonger un cube d'arête inconnue dans un vase à trop-plein. En déduire son volume, puis son arête. Comparer le résultat obtenu à la mesure directe de cette arête.

7. Utiliser la table qui donne les inverses des nombres entiers de 1 à 100. Application au calcul du quotient exact de deux nombres a et b en effectuant le produit $a \times \frac{1}{b}$.

8. Établir le tableau de correspondance entre les nombres 0,1; 0,2; 0,3 jusqu'à 10 et leurs inverses. Construire le graphique sur du papier millimétrique correspondant en prenant la même unité sur les deux axes (1 unité = 2 cm).

9. Dans la proportion : $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ on donne à x les valeurs entières de 1 à 12. Établir le tableau de correspondance entre les valeurs de x et celles de y. Construire le graphique correspondant.

10. Dans la proportion : $\frac{y}{5} = \frac{4}{x}$ on donne à x les valeurs entières de 1 à 20. Établir le tableau de correspondance entre x et y. Construire le graphique correspondant.

11. Sur du papier millimétrique construire et découper un rectangle de dimensions 15 cm sur 8 cm. Chercher la longueur d'un rectangle de 10 cm de large ayant même surface que le premier.

12. Vérifier que deux plaques de tôle de même épaisseur, l'une rectangulaire de dimensions 9 cm sur 4 cm, l'autre carrée de côté 6 cm ont même poids.

II. ALGÈBRE

13. Calculer la valeur numérique d'un monôme ou d'un polynôme à une variable pour des valeurs données de cette variable. Construire le graphique correspondant. Exemples :

1° $\frac{3x^2}{5}$ pour x entier de 0 à 5.

2° $-\frac{4x^3}{10}$ pour x entier de -3 à $+3$.

3° $-x^2+x$ pour $x = \frac{k}{10}$; k entier de -20 à $+20$.

4° $\frac{3}{4}x^2 - 7x + 8$ pour $x = \frac{k}{3}$; k entier de 4 à 32.

5° $\frac{x+3}{2x-5}$ pour x variant de 5 à 8 par valeurs différant de 0,25.

14. Construire deux cubes d'arêtes $a = 7$ cm et $b = 3$ cm, puis trois parallélépipèdes rectangles de dimensions a, a et b et enfin trois parallélépipèdes rectangles de dimensions b, b et a. Constater qu'avec ces 8 solides on peut réaliser un cube d'arête $a + b$. En déduire que : $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$.

15. Construire sur le même graphique les droites d'équation $y = mx$ pour les valeurs de m égales à 0,1; 0,2; 0,3..... 0,9; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,5; 3; 4; 5; 7; 10. Montrer comment on peut utiliser ce graphique : 1° pour trouver m connaissant $x = a$ et $y = b$. 2° pour trouver y connaissant m et $x = a$. 3° pour trouver x connaissant $y = b$ et m.

16. Construire sur le même graphique les droites d'équation : $x + y = a$, a prenant successivement les valeurs entières de 1 à 20. Utiliser le graphique obtenu pour trouver la somme de deux nombres entiers dont la somme est inférieure ou égale à 20 ou la différence de deux nombres entiers dont le plus grand est inférieur ou égal à 20 (abaque de l'addition et de la soustraction).

17. Résolution graphique de systèmes d'équations du premier degré (n° 155).

18. Exercices graphiques sur le mouvement uniforme (n° 159).
Utiliser l'indicateur des chemins de fer pour construire le graphique de la marche des trains sur la voie ferrée qui dessert votre localité. Prendre comme unité 1 mm pour 2 minutes en abscisse et 2 mm par km en ordonnées en se bornant à une longueur d'une centaine de kilomètres.

III. GÉOMÉTRIE PLANE

19. Partager un segment en parties proportionnelles à plusieurs nombres ou à plusieurs segments donnés. Mesurer les segments obtenus et comparer leurs longueurs aux valeurs fournies par le calcul.

20. Construire les points I et J qui divisent un segment de droite AB dans un rapport donné 3/5 par exemple. Mesurer les longueurs IA, IB, JA et JB. Comparer les résultats aux valeurs fournies par le calcul.

21. Construire la quatrième proportionnelle à trois longueurs données (nº 19) a, b et c ainsi que les différentes constructions de moyennes proportionnelles à deux longueurs données a et b (nº 75). Comparer les résultats aux valeurs fournies par le calcul.

22. Construire la moyenne proportionnelle à deux longueurs JA = a et JB = b données en position. Si la médiatrice de AB coupe la bissectrice extérieure de l'angle AJB en O, le cercle de centre O et de rayon OA coupe la bissectrice intérieure de l'angle AJB en C et D. Démontrer en utilisant A' symétrique de A par rapport à OJ que l'on a $\overline{JC}^2 = \overline{JD}^2 = JA.JB$. En désignant par I le milieu de AB, vérifier que l'on a :

$$\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = IC.ID.$$

23. *Compas de réduction.* C'est un instrument qui se compose de deux branches identiques AA' et BB' articulées en O (fig. 1). Quelle que soit l'ouverture AB, les deux triangles isocèles OAB et OA'B' sont semblables et on a : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = k.$

Donc $A'B' = k\,AB$. On pourra utiliser cet instrument pour reporter rapidement différentes longueurs à l'échelle k ou reproduire un dessin à cette échelle.

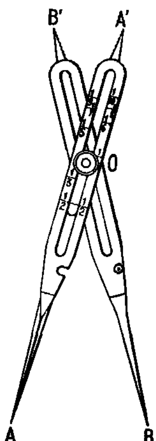


Fig. 1.

24. *Figures homothétiques.* Se donner un point fixe O et un rapport simple : 3/5. Pour chaque point M de la figure donnée F construire le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = 3/5\ \overrightarrow{OM}$. Lorsque M parcourt la figure F, le point M' décrit une figure F' homologue de la figure F dans l'homothétie de centre O et de rapport 3/5 (fig. 2).

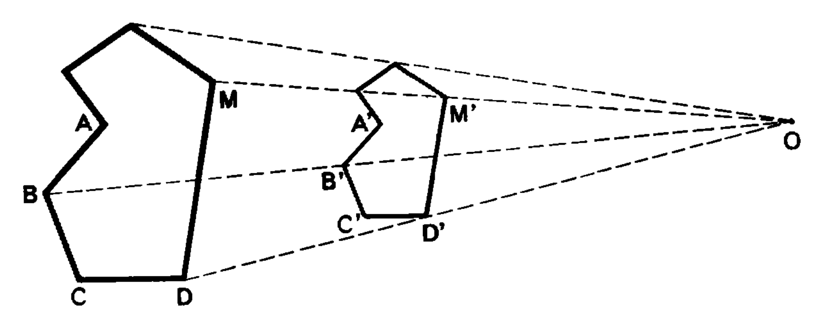


Fig. 2.

Vérifier qu'à tout triangle ABC de la figure F correspond un triangle semblable A'B'C' de la figure F'. La figure F' (ou toute figure égale) est dite *semblable* à la figure F dont elle est la reproduction à l'échelle 3/5. Reproduire ainsi à une échelle donnée un dessin ou une carte de géographie.

25. *Pantographe.* — C'est un instrument que l'on peut aisément fabriquer avec une règle plate que l'on découpe en 4 réglettes identiques de 32 cm de long. Sur l'axe de chaque réglette percer deux trous extrêmes distants de 30 cm et un trou intermédiaire à 12 cm et 18 cm des trous extrêmes. On effectue le montage indiqué (fig. 3) en utilisant en A, B et C des petites vis avec écrous, en O une pointe enfoncée dans

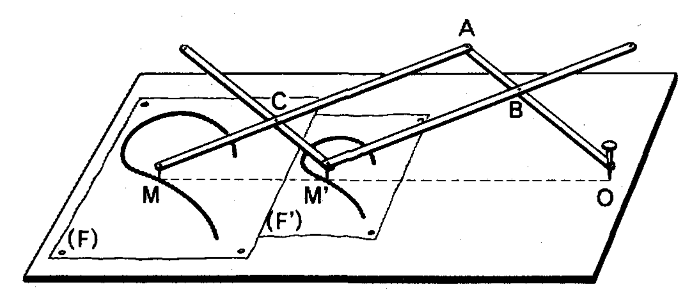


Fig. 3.

la planchette, en M une pointe sèche et en M' une pointe traçante (mlne de crayon dur). L'appareil est déformable mais le quadrilatère BACM' reste un parallélogramme et les points O, M et M' sont toujours en ligne droite et tels que $\frac{OM'}{OM} = \frac{OB}{OA} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

En faisant parcourir à la pointe M la figure donnée F, on trace avec la pointe M', une ligne F' homothétique de F donc semblable à la figure F (T. P. n° 24).

En modifiant la position des trous intermédiaires, on pourra modifier le rapport de similitude.

26. Étant donné un triangle ABC rectangle en A de côtés a, b, c construire dans une plaque de carton ou de contre-plaqué les trois carrés de côtés respectifs a, b, c. Vérifier que le poids du premier est la somme des poids des deux autres et en déduire le *théorème de Pythagore :* $a^2 = b^2 + c^2$.

On pourra dans cet exercice remplacer les carrés par des triangles équilatéraux ou par des cercles de rayons a, b, c.

27. Établir le théorème de Pythagore à l'aide de quatre équerres identiques d'hypoténuse a et de côtés b et c que l'on dispose de deux façons différentes à l'intérieur d'un carré de côté $b + c$. La surface non recouverte a pour aire $b^2 + c^2$ (fig. 4) ou a^2 (fig. 5).

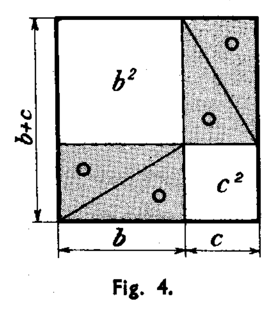


Fig. 4.

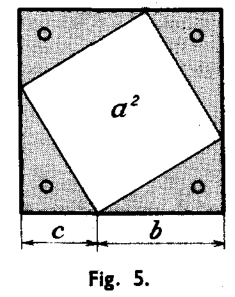


Fig. 5.

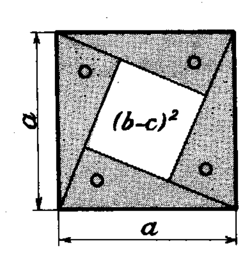


Fig. 6.

Notons que la deuxième disposition (fig. 5) entraîne à elle seule la relation $(b + c)^2 = a^2 + \frac{4\,bc}{2}$ soit après réduction : $b^2 + c^2 = a^2$. On peut aussi disposer les équerres à l'intérieur d'un carré de côté a (fig. 6). On obtient la relation : $a^2 = (b - c)^2 + \frac{4\,bc}{2}$ qui entraîne : $a^2 = b^2 + c^2$.

28. *Distance d'un point inaccessible.* Soit à déterminer sur le terrain, la distance AM du point M visible de A et B (fig. 7). On mesure la distance AB = a et les angles MAB = α et MBA = β. On en déduit : AMB = γ = 180° — ($\alpha + \beta$). Si AH est la hauteur du triangle ABM on a (n° 59) : AH = AB sin β = AM sin γ. Soit : $\text{AM} = \text{AB}\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

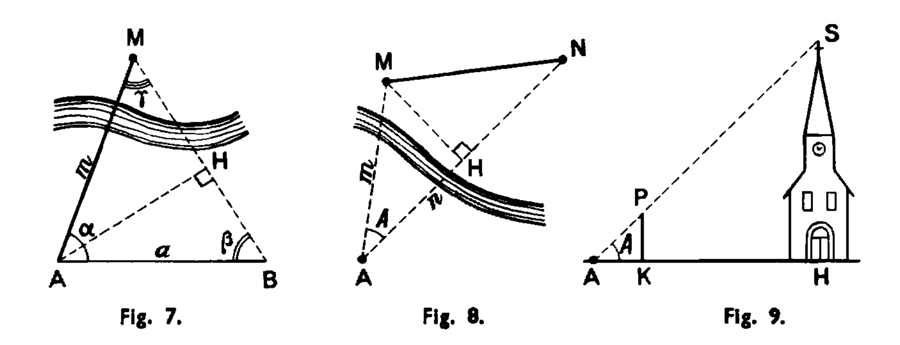


Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

29. *Distance de deux points inaccessibles* M et N (fig. 8). On détermine comme ci-dessus les distances AM = m, AN = n puis l'angle MAN = A. On peut alors écrire : MH = m sin A; AH = m cos A et HN = $n - m$ cos A, ce qui donne :

$$\overline{\text{MN}}^2 = \overline{\text{MH}}^2 + \overline{\text{HN}}^2 = m^2 \sin^2 \text{A} + (n - m\cos \text{A})^2 \text{ soit après réduction :}$$
$$\overline{\text{MN}}^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos \text{A}.$$

30. *Hauteur d'un clocher ou d'un pylône.* 1° Mesurer la distance horizontale AH (fig. 9), puis l'angle HAS = A. On obtient alors h = HS = AH tg A.

2° Si on ne dispose pas d'un appareil de mesure angulaire, planter un piquet vertical PK en prenant A sur la droite SP. La similitude des triangles rectangles AHS et APK donne : $\frac{\text{HS}}{\text{PK}} = \frac{\text{AH}}{\text{AP}}$ soit : $h = \text{HS} = \frac{\text{AH.PK}}{\text{AP}}$.

3° Si le point S est le sommet d'une montagne et A une localité voisine on mesurera la distance horizontale AH sur une carte à grande échelle. La hauteur HS est la différence d'altitude entre le sommet S et la localité A.

IV. GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

31. Vérifier à l'aide d'une règle de 1 m à 1,50 m si les surfaces suivantes sont bien planes : surface de la table, surface du tableau, surface du mur, surface du plancher.

32. Appliquer l'une sur l'autre deux plaques de verre, de métal ou de marbre bien planes et légèrement mouillées ou lubrifiées. On peut facilement faire glisser ces plaques l'une contre l'autre mais il est difficile de les écarter directement.

33. Construire à partir de leur développement les différents solides que vous connaissez : cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide régulière, cône, cylindre etc.

34. Découper à la scie dans une pièce de bois (ou de plâtre) un polyèdre quelconque. Compter le nombre des faces F, le nombre des arêtes A, et le nombre des sommets S. Vérifier la relation d'Euler : $F + S = A + 2$. Vérifier cette relation pour les solides usuels.

35. Construire un triangle ABC et extérieurement à ce triangle les triangles BCD, CAE et ABF tels que $CD = CE$, $AE = AF$ et $BF = BD$. Découper suivant le contour AFBDCEA et plier suivant AB, BC, CA de façon à amener E et F en D et obtenir un tétraèdre ABCD. La construction est-elle toujours possible?

Si les quatre triangles sont équilatéraux, le tétraèdre est régulier. Si $DA = BC$, $DB = CA$ et $DC = AB$ le tétraèdre est équifacial.

36. Tracer sur un cube les diagonales de chacune des faces. Évaluer l'angle de deux arêtes, suivant leurs positions relatives, l'angle d'une arête et d'une diagonale d'une face et enfin l'angle de deux diagonales de deux faces différentes. Donner ainsi des exemples de droites parallèles, orthogonales, ou dont l'angle est égal à 60°.

37. Construire un cube dans un bloc de bois et détacher à la scie les douze petites pyramides dont les plans de base passent par les milieux des trois arêtes issues d'un même sommet. On obtient un solide limité par six carrés et huit triangles équilatéraux. Compter ses sommets, ses faces et ses arêtes. Vérifier la relation d'Euler (T. P. n° 34). Montrer que l'angle de deux arêtes de ce solide est 0°, 60° ou 90°.

38. Scier un tétraèdre ABCD par un plan passant par les milieux des arêtes AC, BC, BD et AD. Vérifier que ce plan est parallèle aux arêtes AB et CD et que la section MNPQ est un parallélogramme. A quelles conditions le quadrilatère est-il un losange? un rectangle? un carré?

39. Vérifier que, dans un cube ABCD A'B'C'D', les plans A'BD et B'CD' sont parallèles, qu'ils sont tous deux perpendiculaires à la diagonale AC' et que leur distance est le tiers de AC'. Montrer que les milieux des arêtes BC, CD, DD', D'A', A'B' et B'B sont dans un plan P, parallèle aux précédents et médiateur de AC'. Scier le cube suivant ce plan et vérifier que la section obtenue est un hexagone régulier.

40. Le parallélépipède oblique ABCD A'B'C'D' est le solide limité par six plans deux à deux parallèles (fig. 10). Construire un parallélépipède dans une pièce de bois, un morceau de plâtre ou de pâte à modeler. Vérifier que les six faces sont des parallélogrammes, que les douze arêtes sont quatre à quatre égales et parallèles et que les diagonales AC', BD', CA' et DB' ont même milieu.

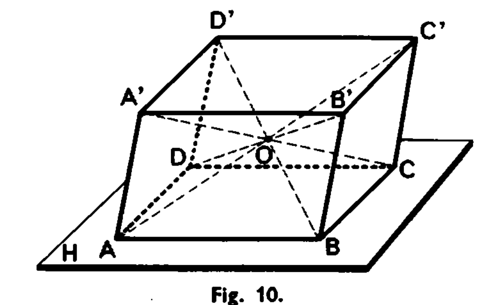


Fig. 10.

41. On découpe un parallélépipède ABCD A'B'C'D' par les plans AB'C, CD'B', B'D'A et ACD'. Il reste le tétraèdre AB'CD'. Vérifier par pesée que son volume est le 1/3 de celui du parallélépipède. A quelles conditions le tétraèdre AB'CD' est-il régulier? Est-il équifacial (faces égales)? A-t-il ses arêtes opposées orthogonales?

42. Découper un cercle de 5 cm de rayon dans du contre-plaqué. Matérialiser son axe par une pointe sans tête dont on fera dépasser la pointe de 1 cm. Vérifier, à l'aide du toton ainsi réalisé, que le cercle reste confondu avec lui-même lorsqu'il tourne autour de son axe. Vérifier d'autre part que tout point de l'axe d'un cercle est équidistant des différents points de ce cercle.

43. Tracer un cercle dans un plan P en fixant la pointe sèche du compas en dehors de ce plan sur un objet (gomme, encrier) posé à l'intérieur du cercle.

Connaissant la hauteur h du centre au-dessus du plan P et l'ouverture l du compas, calculer le rayon r du cercle obtenu.

Reprendre l'expérience avec un ballon sphérique de rayon R.

44. Construire dans une feuille de bristol (ou de tôle fine) deux dièdres égaux. Vérifier que l'on peut amener tout rectiligne de l'un en coïncidence avec un rectiligne donné de l'autre.

45. Dans un cube ABCD A'B'C'D' en bois ou en plâtre que l'on peut scier déterminer expérimentalement l'angle des plans suivants : ABCD et ABB'A'; ABCD et AA'C'C; BB'D'D et ACC'A'. Justifier les valeurs trouvées. Montrer que les six demi-plans consécutifs : AC'B, AC'B', AC'A', AC'D', AC'D, et AC'C issus de AC' délimitent six dièdres de 60°.

46. Soit un tétraèdre régulier ABCD et la hauteur AA'. Vérifier que le plan ABA' est bissecteur du dièdre d'arête AB, que les demi-plans AA'B et AA'C font un angle de 120°, que le plan ABA' est médiateur du segment CD et que les plans médiateurs de AB et CD sont perpendiculaires.

47. Projeter, à l'aide d'un fil à plomb, un cercle sur un plan horizontal. Le cercle sera découpé dans une feuille de carton et fixé sur un support en bois de façon à former un angle α avec le plan de projection. Le diamètre horizontal AB du cercle se projette en vraie grandeur en A'B'. Toute corde MN perpendiculaire en H à AB a une projection M'N', perpendiculaire en H' à A'B' et telle que $H'M' = HM \cos \alpha$. La projection est une *ellipse* (cercle vu en perspective). En déduire la construction directe de cette ellipse en utilisant le cercle de diamètre A'B' (fig. 11). Étudier les formes différentes de l'ellipse suivant que $\alpha = 30°$, 45°, 60°, 75° ou 90°.

48. Vérifier à l'aide d'un fil à plomb que la projection du cube ABCD A'B'C'D' sur un plan horizontal perpendiculaire à la diagonale verticale AC', est un hexagone régulier. Pouvez-vous justifier cette propriété?

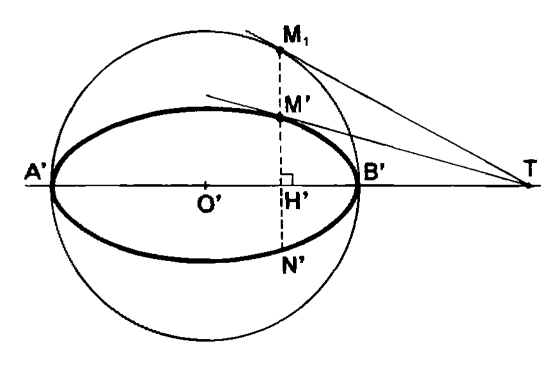


Fig. 11.

49. A l'aide d'un fil à plomb construire la projection orthogonale sur le plan horizontal de la feuille à dessin, de diverses figures ou objets tels que boite rectangulaire, boite à craie cubique, outil d'ajusteur ou de menuisier. Vérifier ainsi que la projection d'un parallélogramme est un parallélogramme, qu'une figure plane horizontale se projette en vraie grandeur, que la projection du milieu d'un segment est le milieu de la projection de ce segment.

V. DESSIN GÉOMÉTRIQUE

— Outre les exercices classiques, croquis coté, lavis, etc. on pourra effectuer les épures comportant les constructions suivantes du cours de géométrie.

50. 1° Partage d'un segment AB en parties proportionnelles à trois longueurs données (n° 17).

2° Quatrième proportionnelle à trois longueurs données (n° 19).

3° et 4° Constructions des points qui divisent un segment dans un rapport donné (n°s 18 et 37).

51. Constructions de figures homothétiques (T. P. n° 23).

52. Constructions d'angles connaissant un de leurs rapports trigonométriques (n° 62).

53. Constructions diverses de moyennes proportionnelles (n° 75 et T. P. n° 22).

54. Constructions de longueurs données par les formules (n°s 76 à 78).

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad x = a\sqrt{15}, \quad x = \sqrt{5a^2 - 3b^2}.$$

Rapports trigonométriques naturels de GRADE en GRADE

Grad.	Radians	Sin	$\frac{1}{\text{Sin}}$	Tang.	Cotg.	$\frac{1}{\text{Cos}}$	Cos		
0	0,000	0,0000	infini	0,0000	infini.	1,000	1,000	1,571*	100
1	0,016*	0,0157	63,66	0,0157	63,66*	1,000	0,9999*	1,555	99
2	0,031	0,0314	31,84*	0,0314	31,82	1.000	0,9995	1,539	98
3	0,047	0,0471	21,23*	0,0472*	21,20	1,001	0,9989*	1,524*	97
4	0,063*	0,0628*	15,93*	0,0629	15,89	1,002*	0,9980	1,508*	96
5	0,079*	0,0785*	12,75*	0,0787	12,71*	1,003	0,9969*	1,492	95
6	0,094	0,0941	10,63*	0,0945	10,58*	1,004	0,9956*	1,477*	94
7	0,110*	0,1097	9,113*	0,1104	9,058*	1,006	0,9940*	1,461*	93
8	0,126*	0,1253	7,979*	0,1263	7,916*	1,008*	0,9921	1,445	92
9	0,141	0,1409	7,097	0,1423	7,026	1,010	0,9900	1,429	91
10	0,157	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,414*	90
11	0,173*	0,1719	5,816	0,1745	5,730*	1,015	0,9851	1,398	89
12	0,188	0,1874*	5,337*	0,1908*	5,242	1,018	0,9823*	1,382	88
13	0,204	0,2028*	4,931	0,2071*	4,829*	1,021	0,9792	1,367*	87
14	0,220*	1,2181	4,584	0,2235	4,474*	1,025*	0,9759	1,351*	86
15	0,236*	0,2334	4,284*	0,2401*	4,165	1,028	0,9724*	1,335	85
16	0,251	0,2487*	4,021	0,2568*	3,895*	1,032	0,9686*	1,319	84
17	0,267	0,2639*	3,790*	0,2736*	3,655	1,037*	0,9646*	1,304*	83
18	0,283*	0,2790*	3,584	0,2905	3,442	1,041	0,9603*	1,288	82
19	0,298	0,2940	3,401*	0,3076	3,251*	1,046	0,9558*	1,272	81
20	0,314	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,257*	80
21	0,330*	0,3239	3,087	0,3424*	2,921*	1,057*	0,9461*	1,241*	79
22	0,346*	0,3387	2,952	0,3600	2,778*	1,063*	0,9409*	1,225	78
23	0,361	0,3535*	2,829	0,3779*	2,646	1,069	0,9354	1,210*	77
24	0,377*	0,3681	2,716	0,3959	2,526*	1,076*	0,9298*	1,194*	76
25	0,393*	0,3827*	2,613	0,4142	2,414	1,082	0,9239*	1,178	75
26	0,408	0,3971	2,518*	0,4327	2,311*	1,090*	0,9178*	1,162	74
27	0,424	0,4115	2,420	0,4515	2,215*	1,097	0,9114	1,147*	73
28	0,440*	0,4258*	2,349*	0,4706*	2,125	1,105	0,9048	1,131*	72
29	0,456*	0,4399	2,273	0,4899*	2,041	1,114*	0,8980	1,115	71
30	0,471	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,100*	70
31	0,487*	0,4679	2,137	0,5295*	1,889*	1,132*	0,8838*	1,084*	69
32	0,503*	0,4818*	2,076*	0,5498*	1,819*	1,141	0,8763	1,068	68
33	0,518	0,4955*	2,018	0,5704*	1,753	1,151	0,8686	1,052	67
34	0,534	0,5090	1,964	0,5914*	1,691*	1,162*	0,8607	1,037*	66
35	0,550*	0,5225*	1,914*	0,6128	1,632*	1,173*	0,8526	1,021	65
36	0,565	0,5358	1,866	0,6346	1,576*	1,184	0,8443	1,005	64
37	0,581	0,5490	1,821	0,6569*	1,522	1,196	0,8358	0,990*	63
38	0,597*	0,5621*	1,779	0,6796*	1,471	1,209	0,8271*	0,974*	62
39	0,613*	0,5750	1,739	0,7028	1,423*	1,222	0,8181	0,958	61
40	0,628	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,942	60
41	0,644	0,6004	1,666*	0,7508	1,332*	1,250	0,7997*	0,927*	59
42	0,660*	0,6129	1,632*	0,7757*	1,289	1,266*	0,7902	0,911	58
43	0,675	0,6252	1,599	0,8012*	1,248	1,281	0,7804	0,895	57
44	0,691	0,6374	1,569*	0,8273	1,209*	1,298*	0,7705	0,880*	56
45	0,707*	0,6494	1,540*	0,8541*	1,171*	1,315	0,7604	0,864*	55
46	0,723*	0,6613	1,512	0,8816	1,134	1,333	0,7501	0,848	54
47	0,738	0,6730	1,486*	0,9099	1,099*	1,352	0,7396	0,833*	53
48	0,754*	0,6845	1,461*	0,9391*	1,065*	1,372*	0,7290*	0,817*	52
49	0,770*	0,6959	1,437*	0,9691*	1,032*	1,393*	0,7181	0,801	51
50	0,785	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,785	50
		Cos	$\frac{1}{\text{Cos}}$	Cotg	Tang.	$\frac{1}{\text{Sin}}$	Sin	Radians	Grad.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

Carrés, cubes, inverses, racines carrées et cubiques, des cent premiers nombres.

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1	1	1	**51**	2 601	132 651	0,0196	7,141	3,708
2	4	8	0,5000	1,414	1,260*	**52**	2 704	140 608	0,0192	7,211	3,733*
3	9	27	0,3333	1,732	1,442	**53**	2 809	148 877	0,0189*	7,280	3,756
4	16	64	0,2500	2,000	1,587	**54**	2 916	157 464	0,0185	7,348	3,780*
5	25	125	0,2000	2,236	1,710*	**55**	3 025	166 375	0,0182*	7,416	3,803*
6	36	216	0,1667*	2,449	1,817	**56**	3 136	175 616	0,0179*	7,483	3,826*
7	49	343	0,1429*	2,646*	1,913*	**57**	3 249	185 193	0,0175	7,550*	3,849*
8	64	512	0,1250	2,828	2,000	**58**	3 364	195 112	0,0172	7,616*	3,871*
9	81	729	0,1111	3,000	2,080	**59**	3 481	205 379	0,0169	7,681	3,893
10	100	1 000	0,1000	3,162	2,154	**60**	3 600	216 000	0,0167*	7,746*	3,915*
11	121	1 331	0,0909	3,317	2,224	**61**	3 721	226 981	0,0164*	7,810	3,936
12	144	1 728	0,0833	3,464	2,289	**62**	3 844	238 328	0,0161	7,874	3,958*
13	169	2 197	0,0769	3,606*	2,351	**63**	3 969	250 047	0,0159*	7,937	3,979
14	196	2 744	0,0714	3,742*	2,410	**64**	4 096	262 144	0,0156	8,000	4,000
15	225	3 375	0,0667*	3,873*	2,466	**65**	4 225	274 625	0,0154*	8,062	4,021*
16	256	4 096	0,0625	4,000	2,520*	**66**	4 356	287 496	0,0152*	8,124	4,041
17	289	4 913	0,0588	4,123	2,571	**67**	4 489	300 763	0,0149	8,185	4,062*
18	324	5 832	0,0556*	4,243*	2,621*	**68**	4 624	314 432	0,0147	8,246	4,082*
19	361	6 859	0,0526	4,359*	2,668	**69**	4 761	328 509	0,0145*	8,307*	4,102*
20	400	8 000	0,0500	4,472	2,714	**70**	4 900	343 000	0,0143*	8,367*	4,121
21	441	9 261	0,0476	4,583*	2,759*	**71**	5 041	357 911	0,0141*	8,426	4,141*
22	484	10 648	0,0455*	4,690	2,802	**72**	5 184	373 248	0,0139*	8,485	4,160
23	529	12 167	0,0435*	4,796*	2,844*	**73**	5 329	389 017	0,0137*	8,544	4,179
24	576	13 824	0,0417*	4,899*	2,885*	**74**	5 476	405 224	0,0135	8,602	4,198
25	625	15 625	0,0400	5,000	2,924	**75**	5 625	421 875	0,0133	8,660	4,217
26	676	17 576	0,0385*	5,099	2,952	**76**	5 776	438 976	0,0132*	8,718*	4,236*
27	729	19 683	0,0370	5,196	3,000	**77**	5 929	456 533	0,0130*	8,775*	4,254
28	784	21 952	0,0357	5,292*	3,037*	**78**	6 084	474 552	0,0128	8,832*	4,273*
29	841	24 389	0,0345*	5,385	3,072	**79**	6 241	493 039	0,0127*	8,888	4,291*
30	900	27 000	0,0333	5,477	3,107	**80**	6 400	512 000	0,0125	8,944	4,309*
31	961	29 791	0,0323*	5,568*	3,141	**81**	6 561	531 441	0,0123	9,000	4,327*
32	1 024	32 768	0,0313*	5,657*	3,175*	**82**	6 724	551 368	0,0122*	9,055	4,344
33	1 089	35 937	0,0303	5,745*	3,208*	**83**	6 889	571 787	0,0120	9,110	4,362
34	1 156	39 304	0,0294	5,831*	3,240*	**84**	7 056	592 704	0,0119	9,165	4,380*
35	1 225	42 875	0,0286*	5.916	3,271	**85**	7 225	614 125	0,0118*	9,220*	4,397*
36	1 296	46 656	0,0278*	6,000	3,302*	**86**	7 396	636 056	0,0116	9,274*	4,414
37	1 369	50 653	0,0270	6,083*	3,332	**87**	7 569	658 503	0,0115*	9,327	4,431
38	1 444	54 872	0,0263	6,164	3,362*	**88**	7 744	681 472	0,0114*	9,381*	4,448*
39	1 521	59 319	0,0256	6,245*	3,391	**89**	7 921	704 969	0,0112	9,434*	4,465*
40	1 600	64 000	0,0250	6,325*	3,420*	**90**	8 100	729 000	0,0111	9,487*	4,481
41	1 681	68 921	0,0244*	6,403	3,448	**91**	8 281	753 571	0,0110*	9,539	4,498*
42	1 764	74 088	0,0238	6,481*	3,476	**92**	8 464	778 688	0,0109	9,592*	4,514
43	1 849	79 507	0,0233*	6,557	3,503	**93**	8 649	804 357	0,0108*	9,644*	4,531
44	1 936	85 184	0,0227	6,633	3,530	**94**	8 836	830 584	0,0106	9,695	4,547*
45	2 025	91 125	0,0222	6,708	3,557*	**95**	9 025	857 375	0,0105	9,747*	4,563
46	2 116	97 336	0,0217	6,782	3,583	**96**	9 216	884 736	0,0104	9,798*	4,579*
47	2 209	103 823	0,0213*	6,856*	3,609*	**97**	9 409	912 673	0,0103	9,849*	4,595*
48	2 304	110 592	0,0208	6,928	3,634	**98**	9 604	941 192	0,0102	9,899	4,610
49	2 401	117 649	0,0204	7,000	3,659	**99**	9 801	970 299	0,0101	9,950*	4,626
50	2 500	125 000	0,0200	7,071	3,684	**100**	10 000	1 000 000	0,0100	10 000	4,642*

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

TABLE DES MATIÈRES

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE

GÉOMÉTRIE

I. Géométrie plane.

II. Géométrie dans l'espace.

Imprimé en France
TYPOGRAPHIE FIRMIN-DIDOT ET Cie. — MESNIL (EURE). — 2211
Dépôt légal : 1er trimestre 1964.